ПРИЛОЗИ УНАПРЕЂИВАЊУ ОБРАЗОВАЊА НАСТАВНИКА

SERBIAN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS

MONOGRAPHS
Volume DCLXXXIII

PRESIDENCY
Book 5

ARTICLES ON IMPROVING THE QUALITY OF TEACHER EDUCATION

Editors
Full member of the Academy
MILOSAV MARJANOVIĆ
PhD STEVAN JOKIĆ

BELGRADE 2016

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

П О С Е Б Н А И З Д А Њ А
Књига DCLXXXIII

ПРЕДСЕДНИШТВО
Књига 5

ПРИЛОЗИ УНАПРЕЂИВАЊУ ОБРАЗОВАЊА НАСТАВНИКА

Уредници
академик
МИЛОСАВ МАРЈАНОВИЋ
др СТЕВАН ЈОКИЋ

БЕОГРАД 2016

Издаје

Срūска академија наука и умеūносūи
Кнез Михаилова 35, Београд

Технички уредник

Мира Зебић

Лектор и коректор

Љиљана Миљковић

Тираж 500 примерака

Штампа

Colorgrafx

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Академијски одбор за образовање тематски се дели на следећа три сектора: Математика са Информатиком, Природне науке и Хуманистичке дисциплине. Прва два чланка ове књижице припадају првом сектору, трећи другом, а четврти трећем сектору. У нешто измењеном облику ови чланци су послужили као основа ауторима за њихова излагања на конференцији Унапређивање предметних дидактика и образовање наставника, организованој од стране овог Одбора и одржаној 22. и 23. октобра 2015. године.
(Видети: http://www.sanu.ac.rs/Odbor-obrazovanje/Konferencija2015.aspx).

Први чланак аутора Милосава М. Марјановића, Структурисање школске аритметике, односи се на суптилни период који обухвата прве три године учења и наставе аритметике, кад је много мање правог рачунања, него је пажња много више усмерена на утемељивање перманентног значења четири рачунске операције. Наиме, на овом нивоу наставе, деца се сусрећу са великим бројем примера који имају форму питања уплетених у разне ситуације из свакодневног живота. Као резултат тих активности формирају се у уму детета менталне слике и схеме које су носиоци тог перманентног значења.

Овај аутор користи језик теорије скупова да опише ове схеме, апстрахујући тип задатака намењених развијању значења сваке од ових операција. Тако, адитивну схему чине два дисјунктна скупа бројности m и n, и нека је s број елемената њихове уније. Кад су бројеви m и n дати, а тражи се s, кажемо да је то задатак сабирања који прати дату адитивну схему. А кад су s и m (одн. n) дати, а тражи се n (одн. m), кажемо да је то задатак одузимања, који прати дату адитивну схему.

Мултипликативну схему чини фамилија од m дисјунктних скупова од којих сваки има по n елемената. Нека је p број елемената уније ових скупова. Кад су m и n дати, а тражи се p, кажемо да је то задатак множења који прати дату мултипликативну схему. А кад су p и m (одн. n) дати, а тражи се n (одн. m), кажемо да је то задатак дељења који прати дату мултипликативну схему.

Поред ових иновација, аутор уводи у дидактику математике Канторов принцип инваријантности броја, који истиче природну зависност концепције броја од перцепције скупа. Наиме, нека је *A* скуп неких објеката који се опажају, тада

(I) апстрахујући природу елемената тог скупа,

и

(II) апстрахујући било какав вид њиховог организовања,
остаје чиста идеја броја *n* (A).

Овај принцип је основа на којој се заснивају закони аритметике (правила рачунања).

Иако у овом периоду нема много правог рачунања, него се тада у оквиру почетних блокова бројева формирају таблице сабирања и множења које улазе у трајни усмени фонд. У тај фонд улази, такође, и дељење са остатком бројева до 19 бројем 2, бројева до 29 бројем 3, бројева до 89 бројем 9 и бројева до 99 бројем 10. Тај усмени фонд је основа на коју се наслањају познати алгоритми извођења четири рачунске операције.

Други чланак аутора Ђорђа Кадијевића разматра изазове средњошколског рачунарског образовања у међународном контексту. Аутор истиче да се настава рачунарства углавном своди на промоцију рачунарске писмености, па је изучавање садржаја рачунарства као научне дисциплине у другом плану или занемарено. Изучавање тих садржаја требало би базирати на избору и усвајању најважнијих појмова рачунарства и начина рачунарског мишљења што аутор види као посебан изазов. Други важан извор изазова аутор налази у идентификовању, развијању и повезивању различитих типова знања потребних за успешну реализацију наставе рачунарства. Изнета анализа, коју аутор заснива на релевантним домаћим и иностраним публикацијама, представља вредан прилог унапређивању средњошколског рачунарског образовања.

Трећи чланак аутора Стевана Јокића приказује ресурсе развијене, у оквиру пројекта Рука у тесту, током последњих петнаест година

Пројекат Рука у тесту, инаугуришући педагогију засновану на понашању научника у лабораторији и радозналости детета узраста 4–11 година, даје допринос научном описмењавању све деце, а не само талената. Позивајући наставнике да имплементирају истраживачки (Inquiry Based Science Education – IBSME) приступ у реализацији научних садржаја у основној и средњој школи настоји да оствари: истинску реформу на пољу научног описмењавања читаве популације ђака у основној и средњој школи, користећи и размењујући позитивна искуства добре праксе, тренингом наставника, онлајн пројектима и дисеминацијом;

стимулише и подржи експериментални приступ научном образовању у коме се одговор на постављене хипотезе добија заједничким радом ученика и наставника. На овај начин се подстиче природна радозналост ученика, која се манифестује кроз постављање питања о реалном свету, феноменима или објектима. Улога васпитача, учитеља, наставника, у настави наука у школама, може бити и следећа: дозвољава ученицима да праве грешке и показује како и зашто грешке могу бити корисне; фаворизује групни и индивидуални рад ученика; фаворизује писање уз разликовање групних и индивидуалних текстова; омогућује дискусију, организује научну дебату; организује комуникацију; помаже ученицима да искажу своје идеје и објасне своје концепције; ради тако да ученици усвоје научни приступ; води активности у којим се ученици суочавају с комплексним проблемима одрживог развоја, климатских промена итд. Да би могли да реализују ове захтеве на располагању им је читав низ квалитетних ресурса у форми књига, интернационалних педагошких пројеката, сајт на српском језику, а организовани су акредитовани семинари, изложбе и низ међународних конференција. Завод за уџбенике и наставна средства, Просветни преглед и Институт Винча су омогућили да се у оквиру библиотеке Зрнца наука – Рука у тесту, уредника, предводиоца и аутора Стевана Јокића, објави 18 књига познатих француских научника и академика, Глобалне мреже академија наука (IAP). На сајту Рука у тесту је, васпитачима, учитељима, наставницима, родитељима, ђацима и заинтересованим за научно описмењавање сваког детета, доступно десетак приручника, као и више докумената добре праксе земаља које су учествовале у ЕУ пројектима POLLEN, FIBONACCI, SUSTAIN и у оквиру уговора САНУ – Француска академија наука –Универзитет у Београду.

Четврти чланак аутора Милице Стевановић карактеришу два основна става: један се тиче схватања просторних односа (о чему говоре и приложене илустрације), а други утицаја тог схватања на образовање уопште.

Пре свега реч је о схватању простора (које се огледа у виђењу растојања између тела, облика тела, „одјекивања" облика једних у другима и у околини – а иње у њима итд.) као места које није празно: оно је испуњено изукрштаним „гравитационим пољима" узајамних утицаја посматрача и онога што се посматра. Општи изглед односно структура целог видног поља, као и границе између „тела" (облика) и „околине" (једно се прелива у друго, простор се згушњава у тела), зависе од кретања заинтересованог посматрачевог погледа, кретања које се током гледања такође мења под утицајем новооткриваних података о ономе што се погледом истражује.

У складу са тим: у уметничким школама свих нивоа потребно би било ослобађати ученике од увреженог схватања да је тзв. реалистичан визуелни рад (како се сада у школама углавном схвата) једном заувек дат као реалистичан. Шта је реално – то је нешто што треба стално преиспитивати и допуњавати (од разумевања стварности зависи и уобличавање целог света у коме живимо). У вези са тим, када се ради о општем образовању, може се констатовати и да је упознавање са уметношћу свих ученика (не само оних опредељених за уметничке професије) једна од најпогоднијих могућности за развијање критичког мишљења, неопходног у савременом образовању. То би се постизало и праксом (већ у свету доста раширеном) укључивања уметника у радионички рад са ученицима, али овде под условом да се ученици сусрећу и раде са уметницима чији су ставови различити, понекад чак и међусобно оштро супротстављени. Тако би били стимулисани не да само прихватају или копирају туђи рад, него да увидом у борбу мишљења, па чак и сопственим евентуалним учешћем у њој, сами преиспитују и уобличавају своје ставове. Важно је да се у том погледу посебно нагласи и интензивира рад са старијим ученицима (крај основне школе, средња школа).

Пријатна нам је дужност да се на крају захвалимо на брижљиво вршеним коректурама госпођама Миљанки Зебић и Јелени Митрић, као и на сталној бризи око формирања рукописа ове књижице госпођи Александри Хрељац.

Аутори

МИЛОСАВ М. МАРЈАНОВИЋ*

СТРУКТУРИСАЊЕ САДРЖАЈА ШКОЛСКЕ АРИТМЕТИКЕ

Айсшракш. – У овом чланку изложен је један приступ обради аритметике у подручју првих 1.000 бројева, па наведимо шта је карактеристично за тај приступ.

– Значење бројева и аритметичких операција везано је за феноменологију коју чине видљиви скупови објеката у окружујућем простору. За те скупове кажемо да су на сензорном нивоу, а ту треба укључити и њихове иконичке представе.

– Идеја броја, зависно од перцепције скупова, развија се апстраховањем природе елемената тих скупова и било каквог њиховог организовања (начином ређања, груписања итд.). Овај пут, који води формирању идеја о појединачним природним бројевима ми називамо Канторовим принципом инваријантности броја. Овај принцип је основа на којој се граде појмови и формирају процедуре у школској аритметици, а одговара формалном појму еквивалентности скупова израженом у терминима обострано једнозначних кореспонденција.

– Сабирање и одузимање, везују се за примере који се могу моделирати као пар дисјунктних скупова.Такву менталну представу називамо адитивна схема, а кад су дати бројеви елемената тих скупова а тражи се број елемената њихове уније, говоримо о задатку сабирања који прати ту схему. А кад је дат број елемената уније и једног од тих скупова, а тражи се број елемената другог од њих, кажемо да је то задатак одузимања који прати ту схему. Значење ових операција почиње да се формира већ у оквиру блока бројева до 10 и има перманентан карактер.

– Множење и дељење везују се за ситуације које се могу моделирати као коначна фамилија једнакобројних скупова, а такву менталну представу називамо мултипликативна схема. Кад је дат број чланова те фамилије и њихова бројност, а тражи се број елемената уније тих скупова, кажемо да је то задатак множења који прати ту схему. Када је, пак, дата бројност уније ових скупова и њихова бројност, а тражи се број чланова те фамилије, говоримо о задатку дељења који се зове раздвајање, док кад је дата бројност уније и број чланова те фамилије а тражи се

* САНУ, e-mail: milomar@beotel.net

бројност тих скупова говоримо о задатку дељења који се зове количковање. Значење множења и дељења почиње да се формира у оквиру блока бројева до 100 и такође има перманентан карактер.

– Изрази састављени од посебних бројева, али и слова као ознака за променљиву, користе се за обраду аритметичких операција и истицање њихових својстава. Али та техника ране алгебре мање је подесна да се изразе поступци цифарског извођења ових операција. Уместо тога користе се бројевне слике и иконичко преставлљање манипулисања са њима. То што ученик јасно види, добро и разуме. Али потребно је да ти поступци буду изражени у терминима саме аритметике, пратећи оно што слагалице (бројевне слике) представљају и како се оне трансформишу. Тај опис временом постаје све упрошћенији и претвара се у унутрашњи говор који прати овакву врсту рачунања. Битно је да наставник схвати праву функцију ових описа и да утиче на њихово спонтано редуковање на форме унутрашњег говора. Ови технички поступци почињу да се значајније обрађују у оквиру блока бројева до 1.000.

На крају рецимо да је овај чланак намењен студентима учитељских факултета и наставницима разредне наставе да би разумели на дубљи начин садржаје аритметике.

Кључне речи и изрази: блокови бројева, Канторов принцип инваријантности броја, адитивне и мултипликативне схеме, рачунање и унутрашњи говор

1. ОБРАЋАЊЕ ЧИТАОЦУ

Учитељски факултети имају у својим програмима општи курс дидактике, два или више курсева психологије, па затим курсеве предметних дидактика и међу њима дидактику математике или, како се код нас тај курс назива, методику математике. Пратећи овај курс студент треба да научи како се организује настава математике и како он или она треба да делују на сцени разреда. Али посебно је важно да тај студент овлада предметним садржајима на дубљи начин и да уме да сагледа процесе кроз које се синтетизују појмови и формирају процедуре у основношколској настави математике. То сагледавање за овог студента није нимало лак задатак и неће спонтано потећи из његовог познавања основа математике коју је учио у основној и средњој школи, укључујући ту и посебни премет који се зове „математика“, а који такође има у програмима ових факултета.

Она или он неће лако спојити своје знање математике са знањем стеченим савлађујући курсеве опште дидактике и психологије. Све ово мотивише овог аутора да заговара интегрисани курс дидактике математике у коме би биле укључене и извесне теме из психологије, изложене на специфичан начин, као и за овај математички садржај релевантне теме из историје математике и историје школства. Читалац ће видети да су у извесној мери такве теме скициране и у овом чланку.

Често се (погрешно) мисли, да ће знање математике, које ученик стекне у почетним разредима основне школе касније средити и формирати, на прави начин, његов или њен наставник математике, и то доводи до извесног лежернијег односа према тој раној настави. Међутим, оно што је тачно, је да је такво касније сређивање могуће само ако има своју основу у почетној настави, која је наслоњена на најширу интуитивну основу коју чини сагледавање и интелигентно поимање окружујуће реалности. Напоменимо да ученик овог узраста оно што види узима као тачно, па настава и учење математике морају бити прилагођени овом развојном периоду.

Напоменимо да се сви математички садржаји јављају у једном од следећа три вида:

– *историјском*, кад су обликовани онако како су првобитно стварани,
– *научном*, кад су обликовани на логички компактан начин и у духу модерних достигнућа математике као науке, и
– *дидактичком*, кад су обликовани према потребама оног који учи, уважавајући његове узрасне карактеристике и когнитивни развој.

Неразликовање ових видова, такође може бити разлог озбиљних неспоразума. То се најчешће дешава кад се принцип научности погрешно схвата и кад се даје предност логички захтевном излагању, пре него што то одговара когнитивној зрелости ученика.

Наш циљ у овом чланку је дидактичко обликовање, односно, како се то друкчије каже, дидактичка трансформација садржаја школске аритметике у оквиру скупа природних бројева до 1.000 (а што према нашим програмима чини аритметику прва три разреда основне школе). Обликујући ове садржаје ми се ослањамо на знање математике, које смо стекли у току своје каријере универзитетског професора, проучавајући дидактику математике као научну дисциплину (ако она као таква уопште постоји), упознајући се са низом класичних курсева дидактике математике од којих наводимо само [Tho], [Wi] и [Mo], пратећи настојања да се у рану наставу математике унесе значење [Br] et al. до екстремно формалистичког приступа у периоду *New Math*-а [Proc_1] и врло критичког осврта на тај тренд [Proc_2]. Тешко би било рећи да после тог тренда постоји ишта што би био један јасно скициран и опште прихватљив приступ. Постоји низ ширих осврта на наставу математике у нижим разредима основне школе као што су [Sk_2], [Ma_1] (са [Ma_2]), [Kil], etc., а томе додајемо и чланке на које се ослања овај наш приступ [Mar], [Mar-Ze], [Mar-Man-Ze]. Читалац се такође упућује на следеће књиге као извор корисних информација [Sr-Eng], [Ler]. Искуству овог аутора знатно је допринело држање курса дидактике математике на Учитељском факултету и Математичком факултету, Београдског универзитета, као и писање више варијанти (и по различитим програмима) уџбеника математике за прва четири разреда основне школе.

У овом чланку, ми ћемо следити идеје Х. Фројдентала ([F_1], [F_2]), проводећи дидактичку анализу тема аритметике у наведеном оквиру, имајући као основу и скице обликовања тих тема, како би оне требало да теку у разреду (без икаквог осећаја страха да тиме снижавамо академски ниво овог излагања). Мислимо да је управо то ослањање на конкретно, оно што мисли Фројдентал кад каже да „било која наука о настави мора почети са наставом нечега“. Дидактичко обликовање садржаја тј. његова дидактичка трансформација је један знатно шири задатак, него што је његово познавање на оперативном нивоу. Како спознаја ове врсте почиње опажањем, основе когнитивне психологије су битни оквир у коме се право разумевање аритметике одвија на овом нивоу.

А сад наведимо шта је ново (или делимично ново), а што даје овај наш приступ.

– Прво, то је поступна разрада аритметичких садржаја изградњом блокова бројева до 10, до 20, до 100 и до 1.000. Сваки од тих блокова је систем индивидуалних појмова који чине бројеви који му припадају, са везама међу њима које се успостављају путем аритметичких операција. Ови блокови су изванредан пример система научних појмова како тај систем дефинише Л. Вигоцки ([Vy]), а схватањем на други начин, то су конкретни примери математичких структура. Идеја о бројевним блоковима није нова, она потиче од немачког едукатора и реформатора образовања Ф. Е. фон Рохова, ново је систематско назначавање дидактичких задатака који се остварују у оквиру тих блокова.

– Друго, то је формулисање Канторовог принципа инваријантности броја као когнитивне везе између базичне феноменологије аритметике (скупова из опажајног окружења) и концептуалног система који чини систем природних бројева. Бројеви у својој природној зависности од скупова објеката који се опажају, настају као апстракције када:

– се занемари природа тих објеката,
– било каква организованост тих објеката у скуповима којима припадају.

У нешто мало измењеној форми Кантор је формулисао овај принцип који замењује формални појам бројевне еквивалентности скупова изражене у терминима обострано једнозначних кореспонденција. Такође, формално везивање сабирања, за дисјунктну унију скупова и множења, за директни производ скупова, у нашем приступу своди се на дидактичке појмове адитивне, односно мултипликативне схеме, које се предочавају ученицима у виду разноврсних примера опажајних ситуација, а које се одражавају у уму као менталне активности, са заједничком основом, коју формално те скуповне операције изражавају.

– Треће, доследније коришћење ране алгебре, пре свега симболичко записивање збирова, разлика, производа и количника, али и састављање неких других сложенијих израза. Изводе се својства операција индуковањем значења: размена места сабирака, здруживање сабирака, размена места умањиоца и разлике, размена места чиниоца, здруживање чиниоца, размена места делитеља и количника, правила о множењу збира и разлике, итд. Свако од ових правила треба сматрати независним, једног од других и она представљају посебне манифестације Канторовог принципа инваријантности броја. (Наравно, касније кад долази до логичког срећивања алгебре, нека се од њих узимају као аксиоме, а друга из тих аксиома изводе).

Трансформисање израза, коришћењем наведених правила је сувише захтеван задатак за децу овог узраста, па примери те врсте морају бити програмирани тј. изрази који настају трансформацијом морају бити дати, сведени до на извесне симболе који су изостављени и то изостављање је назначено држачима места (у овом чланку цртицама) где ученици пишу „оно шта треба". Да би ова техника, битна за разраду ране алгебре, била ефикасно примењена, држаче места треба користити, како то њихов назив сугерише, као ознаке које показују места где нешто недостаје и где то што недостаје треба написати. Друге улоге, као што је, на пример, решавање једначина по држачима места само ремете чисту употребу ове значајне технике.

Познато је да ученици имају велике потешкоће да схвате словну алгебру и њена „правила без резона". Рана алгебра им помаже да радећи конкретније (са посебним бројевима) они се упознају са својствима записа које ће касније прихватити са смислом да ти записи важе за произвољне бројеве (у нашој терминологији они имају инваријантну форму), а слова тада стоје да означе те произвољне бројеве. С друге стране, рана алгебра је техника путем које се обликује аритметички садржај кад се бројевни изрази третирају као ознаке за бројеве (имају своју бројевну вредност), а не као команде за рачунање. Данас је литература која третира проблеме ране алгебре врло опширна, а ми ћемо овде навести само: [Ki_1], [Ki_2] и [Cai].

– Четврто, наше иконичко представљање бројева до 1.000 испуњава све захтеве које чине то представљање флексибилним, да се тим путем, такође, представе четири аритметичке операције које сугеришу манипулативне радње са дидактичким материјалом ([Mar-Man]). Кад би се те операције изводиле симболички, орерисало би се по правилима како се то ради са полиномима (овде по степенима броја 10), али је још сложеније, јер се коефицијенти редуцирају на скуп бројева {0, 1, 2, ... , 9}. Предност у односу на такво оперисање има традиционални начин записивања ових операција, где се цифарским записима истичу месне вредности цифара. Придружујући иконичким представама радње на таквим записима и описујући их такође у виду пропратног текста, формира се основа да се оно што се добија у виду формирања цифарских записа и паралелно изражава путем језика, потпуно разуме као интелигентна активност кроз коју се значење кодификује путем симбола и путем речи. Овај пропратни текст, поступно, са већом увежбаношћу и аутоматским извођењем ових операција упрошћава се и добија карактеристичну форму унутрашњег говора ([Vy]). За упознавање са значајем иконичког представљања и наративног изражавања читалац се упућује на Брунерове књиге [Bru1] и [Bru2].

Начин излагања у овом чланку је одабран тако да буде потпуно приступачан разумевању студената учитељских факултета и свих наставника разредне наставе. Све дискутоване теме биће прожете примерима конкретног обликовања предметних садржаја (независно од било ког посебног курикулума), који су сруктурисани тако да сугеришу учениково активно ангажовање у формирању појмова, индуковању и изражавању својстава и савлађивању процедура.

2. КРАТКИ ИСТОРИЈСКИ ОСВРТ НА НАСТАВУ АРИМЕТИКЕ

У древним грчким училиштима деца су учила аритметику користећи *абакус* којим су се служила да се упознају с начином записивања бројева и да науче методе рачунања са њима. Тај предмет звао се *logistica numerosa* и није сматран науком, него корисном вештином. Тај акценат на корисном био је увек присутан као главни циљ наставе аритметике. Такође је вештина записивања бројева и извођења четири аритметичке операције у тим записима увек истицана као основни захтев који настава тог предмета треба да оствари. Та вештина стицала се путем дриловања без настојања да се формалне радње разумеју. То је нарочито било карактеристично за средњовековну наставу, која је била под утицајем тада владајуће доктрине о урођеним идејама. Међутим, рационална филозофија у периоду Просвећености акцентује чулно искуство и рефлексивно мишљење као искључиви извор спознаје. Велики искорак у том правцу је *визуелни метод* Коменског, представљен у његовом чувеном делу *Orbis Sensualium Pictus* („Видљиви свет у сликама”) у коме се илуструју представе реалног света и везују за реченице којима се описују, па се тако опажајни садржаји процесирају путем њиховог језичког кодификовања. Тим путем Коменски промовише *принцип очигледности* по коме учење почиње опажањем, а затим се опажајни материјал процесуира и тај пут води до изградње појмова са пуним значењем. Скицирајући овај приступ обраде аритметике, трудили смо се да испоштујемо низ захтева класичних дидактичара, без њиховог експлицитног истицања, па се овде ограничимо да истакнемо шта је био дидактички кредо Песталоцијевих следбеника из периода 19. века:

- *Крајњи циљ наставе аритметике је формирање апстрактних појмова.*
- *Појам броја мора се формирати на основи која пружа значење и очигледно сагледавање,*
- *Та основа не сме бити претворена у играрију.*

Како су само они били у праву тада, као што су и сада.

Од тог периода је наглашен захтев да се аритметика учи са разумевањем, мада се она дуго изграђивала формалистички, зависно искључиво од декадних записа бројева. Да би се таква зависност превазишла, у периоду *New Math*-а број се осмишљава као заједничко својство свих међусобно еквивалентних скупова. Та еквивалентност је истицана путем обострано једнозначних придруживања, а технички то се сводило на цртање стрелица које су ишле од елемената једног скупа до другог њему еквивалентног. Претенциозност тог приступа састоји се у томе, што се тим путем формира општа идеја (кардиналног) броја, пре него што би се осмислили појмови појединачних почетних бројева природног низа. Заснивање математике на теорији скупова био је значајан допринос колективног француског математичара Н. Бурбакија (серија књига [Bour]), али покушај обнове наставе математике на тој основи показао се неуспешним. Међутим, представа о скупу неких објеката које опажамо претходи идеји о њиховом броју, а што јесте основа која омогућује развијање значења у аритметици. Не постоји никакав опште прихватљив пут обраде аритметике, који би био замена за онај који је доминирао у периоду *New Math*-а, па је од интереса свако сагледавање, како се усмерава перцепција и како се процесуира искуствени материјал са циљем формирања појмова и њихових система у настави аритметике. Том циљу је посвећено и ово наше излагање.

3. СКУПОВИ НА СЕНЗОРНОМ (ОПАЖАЈНОМ) НИВОУ

У другој половини деветнаестог века креирана је теорија скупова, као појмовни систем и језик општији од језика и система какви су били тадашња алгебра и геометрија. Сам појам скупа јавља се као општији од свих других појмова класичне математике, тј. ови појмови су се могли дефинисати свођењем на појам скупа и додавањем карактеристичних својстава. На тај начин теорија скупова постала је основа за логичко заснивање целокупне математике, а тај програм почео је нарочито да остварује колективни француски математичар Никола Бурбаки. Серија његових књига, објављених до средине двадесетог века, имала је огромни утицај на развој математике и начин њеног излагања.

Са таквом општошћу значења, појам скупа има примере на свим нивоима апстрактности. Кад су примери групе објеката реалног света, о њима ћемо говорити као о скуповима *на сензорном (опажајном) нивоу*. Постоје речи у природном језику које означавају скупове чији су елементи посебне врсте бића или предмета. На пример, говоримо о јату птица, стаду оваца, гомили цигли, свежњу прутова и сл. Употреба тих речи зависна је од врсте елемената скупова које оне означавају, и ниједна од њих не може се користити а да се о томе не води рачуна. Реч „скуп" могла би, према смислу који јој у математици приписујемо, бити коришћена не обазирући се на врсту елемената. Тако, на пример, можемо говорити о „скупу коња" (уместо о крду) „скупу пчела" (уместо о роју) и сл. Тада се не прави никаква логичка грешка, али се нарушава осећај за језик који се формира спонтаном употребом одговарајућих речи. А сад размотримо разлоге који доводе до оваквих језичких извитоперивања.

Представе о скуповима које опажамо претходе (тј. основа су) процесирању које води формирању идеје о бројевима. То је тако било и у ранијим временима, кад се реч скуп није ни употребљавала и кад су се за дидактички материјал користиле гомилице зрнаца пасуља или нешто томе слично. Та зависност идеје о броју од оне о скупу нарочито је истицана у периоду *New Math*-а, па као рецидив из тог периода још се у програмима за предшколске установе и почетне разреде основне школе налази тема „Скупови". Па, уместо да се овај наслов схвата као дидактички језик који упућује на перцепцију феномена реалног света као основе од које зависи формирање идеје о броју, задатак те теме се погрешно схвата, настојећи да се речи „скуп" одмах да проширено значење употребама које су непотребне и извитоперују добар осећај за језик. Дакле, речи као што су јато, крдо, гомила, рој и сл. користимо да би њима изражавали феномене реалног света користећи се природним језиком и те речи означавају скупове на сензорном нивоу и нема никакве потребе, нити ефекта усиљено их замењивати речју „скуп".

Перцепција скупова на опажајном нивоу настаје као резултат усмеравања пажње на неке објекте који се издвајају својим сличним својствима, или су то објекти који су опажајна целина, јер су скупљени на истом месту и сл. То издвајање мора бити јасно у том смислу да се тако издвојени објекти разликују од било којих других. Тај захтев је аналоган оном формалном, у теорији скупова, кад сматрамо да је неки скуп задат кад можемо да за било који објекат утврдимо припада ли том скупу или не. Истакнимо такође да елементе опажамо као природне целине (и не водимо рачуна о њиховим могућим деловима). Те целине зовемо *објекти опажања*, изражавајући се језиком психологије, односно *елементима*, изражавајући се језиком теорије скупова. Некада је потребна извесна допунска информација да би се јасно назначило шта су те целине које се узимају као елементи скупова који се опажају. То илуструје следећи пример са сликом и пратећим текстом.

Сл. 1

Деца уче да плешу. Број ученика је _____ (10). *Број присутних лица је* _____ (11). *Број парова који плешу је* _____ (5).

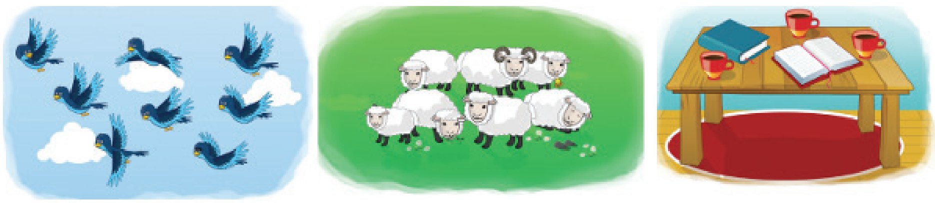
Бројевима у заградама, који се очекују као одговори које ученик даје, претходи перцепција три скупа – скупа ученика, скупа присутних лица и скупа парова који плешу. Први од ових скупова је подскуп другог, али трећи скуп није подскуп ниједног од прва два (а таква грешка се прави кад се год не схвати исправно да су елементи оваквих скупова опажајне целине).

Објекти реалног света остају идентични сами себи и кад мењају своје место у простору око нас. Тако и *скуп објеката реалног света остаје идентичан сам себи, кад ти објекти мењају своје место у простору*, све дотле док се не нарушава основа на којој су ти објекти издвојени у тај скуп као организовану целину. На пример, ако на столу стоје шоље па их различито размештамо, тај скуп шоља на том столу остаје исти при тим размештањима све док неку од тих шоља не уклонимо или неку нову не додамо. Напоменимо да је ово инваријантно поимање скупова на сензорном нивоу у складу са правилом једначења скупова – два скупа су једнака кад се састоје од истих елемената.

4. *ORBIS PICTUS* АРИТМЕТИКЕ

Кад погледамо савремене уџбенике аритметике запазићемо велику структурну сличност са већ поменутим делом Коменског *Orbis Sensualium Pictus*. Те књиге пуне су разноврсних илустрација уз које стоје аритметички кодови којима оне дају значење. Кад говоримо о *orbis pictus*-у аритметике мислимо баш на те илустрације и оне имају изузетну улогу у процесу учења. Ипак, правилно схватање њихове функције није тако једноставно да не би захтевало извесну пажњу.

Аритметика је најпримењљивија грана математике, а те примене су везане за свакодневне ситуације. Кад неку од тих ситуација и, уопште, кад феномене реалног света представљамо сликом (односно цртежом) тада ћемо такав иконички знак звати *пиктограмом*. На пример, цртежи на Сл. 2

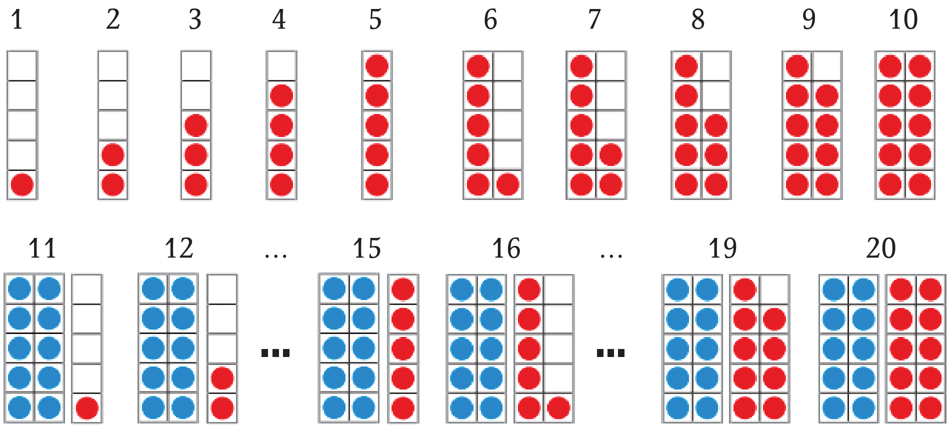


Сл. 2

су пиктограми и представљају редом: јато, стадо и сто са предметима на њему.

Посебно су значајни иконички знаци којима представљамо појмове, а најтипичнији примери таквих знакова су разне геометријске фигуре. Кад лењиром цртамо праву линију или шестаром круг, ми тако реализујемо иконичке знакове којима представљамо идеје о правој линији односно о кругу. Овакви иконички знакови пројектују значење појмова, али их извесни шум (небитна својства) који садрже као објекти реалног света разликује од идеалних представа о тим појмовима. На пример, кад цртамо праву линију тј. реализујемо њен иконички знак, тада тај знак има извесну дебљину и боју којом се издваја из беле основе папира, а та својства не приписујемо идеалној представи о правој линији. Ову врсту знакова који су значећи сами по себи и којима представљамо појмове називамо *идеограми*.

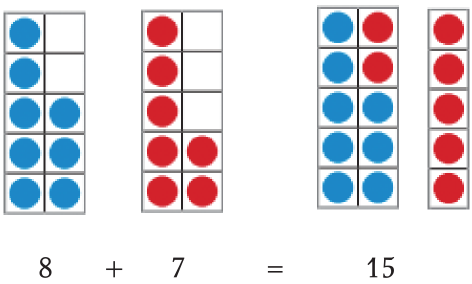
Типични примери идеограма у аритметици су бројевне слике. На Сл. 3 приказани су идеограми којима представљамо бројеве до 20.



Сл. 3

Иако кажемо да ове слике представљају бројеве, стварно, оне престављају добро структурисане скупове чија се бројност таквим структурисањем што боље пројектује.

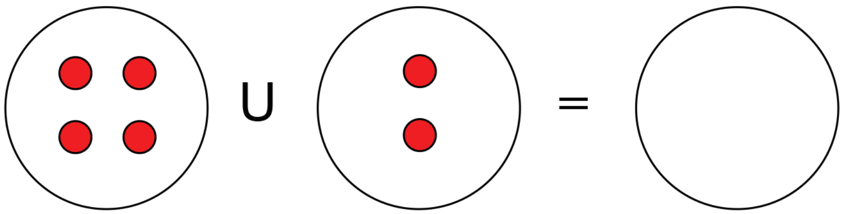
Кад бројевне слике називамо слагалицама, тада се њихова улога мења и оне се узимају као пиктограми који представљају неке стварне слагалице објеката као што су, на пример, жетони. На пример, на Сл. 4 представљено је сабирање као преслагање две гомилице (жетона) у једну.



Сл. 4

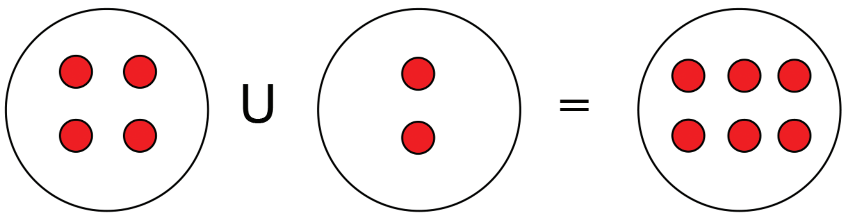
Кад иконички представљамо неку реалну ситуацију тада је трајање искључено (па тиме и временске одреднице „пре“, „а затим“ и сл.). Фигуративно говорећи, то представљање одговарало би „тренутном снимку“ неке ситуације, а за све што је представљено на том снимку рећи ћемо да припада истом *иконичком домену*. Да би се избегле могуће конфузије мора се уважавати правило *да су два иконичка знака који припадају истом иконичком домену различити чим се налазе на различитим местима*. Тако на Сл. 4, сви кружићи у трима слагалицама су различити (иако они из треће могу представљати жетоне из прве две слагалице). Дакле, треба разликовати иконичке представе од њихових могућих интерпретација.

Наведимо сад пример једне „скуповне једначине“ чије би замишљено решавање било кршење горе наведеног правила разликовања (одн. једначења) иконичких знакова.



Сл. 5

„Решење“ које се очекује би било шест кружића који су уцртани у празан оквир (и исте величине као они дати). Кад се „унија“ скупова на левој страни „знака једнакости“ једначи са тим скупом од 6 кружића, тада то једначење иде елемент по елемент. Ако иконички представимо „решење“ задате „једначине“ (Сл. 6)



Сл. 6

тада заиста не знамо зашто је неки кружић с леве стране „знака једнакости“ једнак неком (и коме?) на десној страни те „једнакости“. Ако тако неосновано једначимо те кружиће, зашто тада сви они не би били међусобно једнаки!

Ова „једначина“ у иконичком облику може да буде замишљена да представља манипулативни поступак формирања уније два скупа, рецимо жетона, њиховим преслагањем тако да се створи утисак о једној организованој целини. У том манипулативном поступку нема ничега лошег. Лоше је то што тај поступак (који траје у времену) покушавамо да представимо сликом (која је израз тренутне ситуације), а што је тада основа за могуће конфузије. Уз то користе се синтактички знаци за унију и једнакост и схватају као команде извођења манипулативних активности. Такво коришћење синтактичких знакова у домену иконичког представљања је типичан „варваризам“ (па ако су овде наводници употребљени да се ублажи ова квалификација, они уз речи унија, решење и једначина стоје да означе извитоперена значења тих термина).

Честе су и друге сличне конфузије које производе неадекватне иконичке представе у почетним уџбеницима аритметике. Извесна опширност са којом смо коментарисали претходни пример послужиће пажљивом читаоцу да и сам открива неке од њих.

5. КАНТОРОВ ПРИНЦИП ФОРМИРАЊА БРОЈА

Било би претерано рећи да опажамо бројеве, јер су они апстрактни појмови, али ако уз те појмове посматрамо класе скупова на опажајном нивоу који им дају значење, онда говорити о опажању тих скупова има смисла. Наравно, наше идеје о бројевима (а овде мислимо на почетне бројеве природног низа) почињу опажањем конкретних скупова, па се тај опажајни материјал подвргава усмереном апстраховању које води формирању појмова појединачних природних бројева, који су у границама нашег свакодневног искуства.

Подсетимо се да кардинални број одређујемо као заједничко својство класе свих међусобно еквивалентних скупова. А два скупа су еквивалентни ако постоји обострано једнозначна кореспонденција међу њиховим елементима. Кардиналне бројеве коначних скупова називамо природни бројеви, а ми ћемо само њих овде разматрати и о њима, изражавајући се кратко, говорити као о бројевима. Ово је формална дефиниција броја у теорији скупова и њу не можемо успешно користити као основу за изградњу система природних бројева. Али она може да нам послужи да уочимо велику разлику између перцепције једног скупа и апстраховања заједничког својства свих других скупова који су с њим еквивалентни. Често је много теже рећи (или је то пак немогуће) шта апстрахујемо, а лакше је рећи шта су својства примера који стоје уз неки појам и која у процесу апстраховања занемарујемо. Тако је Георг Кантор

([Can]) описао процес који од перцепције S неког скупа води до идеје о броју $\overline{\overline{S}}$ његових елемената као следећа два занемаривања:

(I) природе елемената скупа *S*,

(II) редоследа како су елементи скупа *S* поређани.

Кантор је користио две црте изнад слова којим се означава скуп да би тако означио број његових елемената као резултат два горе наведена занемаривања.

Кад бројимо елементе неког скупа, ми тим елементима придружујемо исте називе за бројеве без обзира шта бројимо људе, ствари или објекте неке друге природе. На тај начин се спонтано испољава прво од горња два занемаривања. Бројимо, такође, ређајући елемент по елемент при чему не водимо рачуна о редоследу којим то ређање вршимо. Тим путем се спонтано испољава и друго од два наведена занемаривања.

Довољно је да мало појачамо формулацију другог занемаривања, па да добијемо Канторов когнитивни принцип на коме се темељи генеза броја и операција са њима тј. изградња школске аритметике.

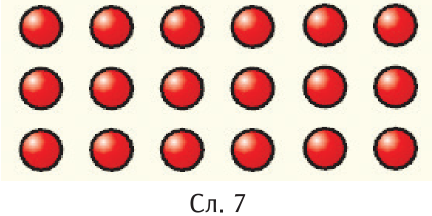
Канторов принцип. *Перцепција скупа претходи идеји о броју његових елемената. Та идеја резултира путем следећа два занемаривања:*

(I) *природе елемената тог скупа,*

(II) *било ког начина организовања елемената тог скупа.*

Под организовањем елемената неког скупа подразумеваћемо начин како су ти елементи поређани или груписани у подскупове, или како је тај скуп структурисан на било који други начин.

Наведимо једну врло значајну врсту примене овог принципа са којом ћемо се сретати у наставцима овог чланка, где ће је пратити подробнији детаљи. Кад су скупови тако структурисани да се њихови елементи могу видети груписани на различите начине, тада се број елемената такође записује на различите начине (тј. у виду различитих израза). А како број не зависи од начина структурисања скупова, ти различити записи означаваће један те исти број, па их зато можемо једначити. Таквим једначењем утемељују се сва правила аритметике, што истиче велики дидактички значај Канторовог принципа. На пример, кад су скупови структурисани у виду правоугаоних схема, рецимо као на Сл. 7,



Сл. 7

тада можемо видети 3 групе по 6 елемената (гледајући по врстама), што је укупно $3\cdot 6$ елемената или видимо 6 група по 3 елемента (гледајући по колонама), што је укупно $6\cdot 3$ елемента. Једначењем ових записа добијамо једнакост $3\cdot 6 = 6\cdot 3$, па се тако кроз сличне примере индукује правило о комутативности множења.

Напоменимо овде да се у неким уџбеницима ово и друга основна правила „изводе" срачунавањем: $3\cdot 6 = 18$, $6\cdot 3 = 18$, па је $3\cdot 6 = 6\cdot 3$. Оваквим срачунавањем у неколико посебних случајева не може се извести ниједно опште правило (а само се тако испољава неразумевање процеса кроз које се формирају садржаји аритметике). Не можемо срачунавањем упоредити $m\cdot n$ и $n\cdot m$, док лако замишљамо правоугаону схему са m врста и n колона, а што води спонтаном индуковању овог општег правила.

6. БРОЈАЊЕ ИЛИ ПРИДРУЖИВАЊЕ – ЈЕДНА ПРИВИДНА ДИЛЕМА

Често се чује да се истичу два могућа приступа обради аритметике – бројањем, при чему се има у виду традиционална настава аритметике и придруживањем, при чему се имају у виду савременији поступци формирања идеје о броју као заједничком својству свих бројевно еквивалентних скупова. Ови последњи поступци били су нарочито доминантни у периоду „New Math"-а, а и данас су присутни на мање наглашен начин, кад видимо неке активности придруживања као што је цртање линија које спајају елементе скупова и сл. без издвајања и именовања посебних бројева (почев од 1 па даље). Путем оваквих простих поступака придруживања тешко се може очекивати да ће се формирати општи појам броја као заједничко својство међусобно еквивалентних скупова. Уосталом, време је показало сву неефикасност ових поступака.

С друге стране бројање се наивно узима као поступак који може да неограничено тече, иако су сами називи за бројеве везани за њихове декадне записе, а ови су опет везани за груписање највише девет јединица, десетица, стотина итд. У ствари, овде говоримо о декадним записима који су изрази облика

$$a_n\cdot 10^n + \ldots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0$$

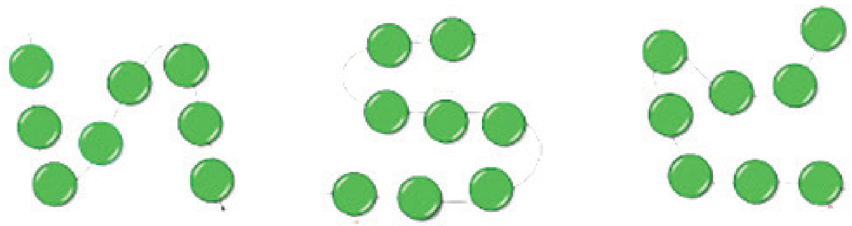
и представљају збирове производа декадних јединица и бројева $a_n, \ldots, a_2$, a_1, a_0 из скупа $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Знамо да те бројеве називамо цифре, а сам запис означавамо краће, пишући $a_n \ldots a_2a_1a_0$, при чему место цифре у том запису одређује декадну јединицу уз коју стоји. На пример, 7508 је краћи запис за $7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8$, цифра 8 је јединица или кажемо да стоји на месту јединица, 0 је цифра десетица или стоји на месту десетица, 5 је цифра стотина или стоји на месту стотина, 7 цифра хиљада или стоји на месту хиљада. Традиционални приступи били су често формалистички – прво се учило декадно записивање и читање бројева са истицањем вредности цифара зависно од места на коме фигуришу у тим записима. Аритметичке операције су се училе као формални поступци који су се изводили на декадним записима. Овај приступ није омогућавао да се идеја о броју развије независно од његовог декадног записа, а реакција на тај негативни аспект традиционалне наставе узроковала је придруживања као поступке који идеју броја ослобађају од било каквих записа, а што је било доминантни тренд у периоду „New Math"-а.

Кад обратимо пажњу на називе бројева, који исказују колико је којих декадних јединица и на њихове декадне записе, примећујемо да и ти називи и ти записи имају адитивно-мултипликативну структуру. Ово нам јасно указује да *скуп природних бројева није само низ бројева него је то систем (структура) коју чине ти бројеви заједно са рачунским операцијама*. Па тако видимо да *прави приступ обради аритметике чини градуирана изградња система природних бројева која се састоји од поступне изградње блокова бројева* (до 10, до 20, до 100, итд.) *са назначеним дидактичким задацима*. У тим блоковима почињу да се обрађују рачунске операције, па тако и они представљају не само скупове бројева него и структуре које тим скуповима дају те операције. Како један те исти број можемо записивати на више начина као збир, производ и сл., тиме идеју броја ослобађамо од искључиве зависности од декадног записа. Но, о томе касније и на одговарајућим местима.

7. БРОЈАЊЕ КАО УВОДНА ТЕМА АРИТМЕТИКЕ

Многа деца, и пре поласка у школу, науче да броје до 10. То бројање је рецитовање назива бројева редом како следе, али бива и активност пребројавања, рецимо, прстију на рукама или неких других објеката из дететовог окружења.

Ово спонтано умеће да се правилно ређају називи бројева до 10, треба да се, вежбама у разреду, прошири на све ученике у току њихових првих дана у школи. Добре су вежбе кад наставник формира гомилице предмета који служе као дидактички материјал, да би деца бројала те предмете у тим гомилицама, изговарајући називе бројева (до 10) уз сваки од тих предмета. Биће, наравно, добро да се уз сваки изговорени назив броја по један предмет помери на друго место, где ће они формирати нову гомилицу. На сликама где су представљене групе предмета, могу се цртати линије које их спајају на различите начине (Сл. 8).

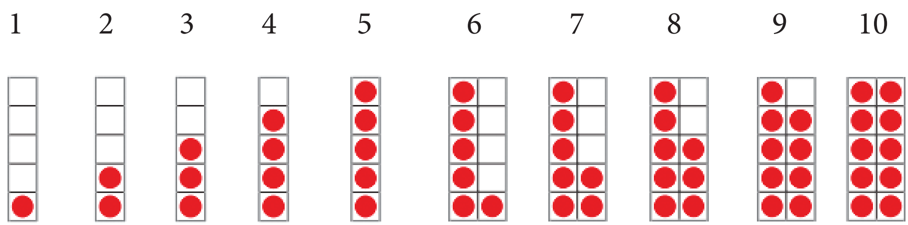


Сл. 8

Тада, идући дуж тих линија броји се различитим редоследом, па се запажа да је резултат тих бројања увек исти број, независно од редоследа пребројавања.

Бројањем група различитих објеката, као што су људи, животиње, плодови, аутомобили и сл., деца развијају *идеју* о броју као независну од природе елемената који се пребројавају. Кад се иста група објеката пребројава различитим редоследом, деца стичу осећај да број не зависи од редоследа пребројавања.

Оваквим пребројавањем почиње формирање појмова појединачних бројева од један до десет. То формирање треба да прате иконичке представе везане за овај низ од првих десет бројева. У ту сврху треба користити бројевне слике (као нпр. на Сл. 9),

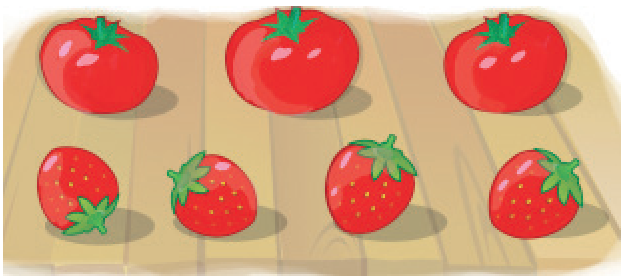


Сл. 9

које вежбањем деца уче да препознају по облику и на први поглед. Свака од ових бројевних слика добија свој назив, па говоримо, на пример, „слагалица која представља број седам“ или то скраћујемо говорећи о „слагалици седам“. Пошто слагалице треба да буду поређане истим редоследом којим ређамо називе бројева (као на Сл. 9), корисна је вежба кад наставник показује прстом на једну по једну од њих, а деца изговарају називе одговарајућих бројева. Показујући прстом идући слева надесно, деца ће бројати унапред, а идући здесна налево бројаће уназад. Треба вежбати та бројања не само почев од једног краја до другог, него и почињући од дате слагалице идући улево или удесно.

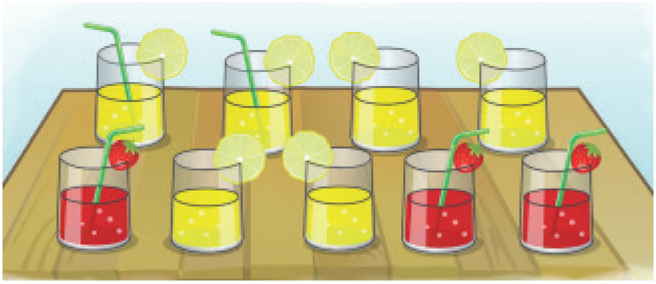
Приметимо да су слагалице тако дизајниране да се одмах види која од које има већи број кружића. Тако уз Сл. 9 могу да иду и вежбе поређења. Наиме, издвоје се две слагалице, рецимо, слагалица четири и слагалица седам, па се пита која има већи број кружића. Очекујемо да ће деца одговорити да је то слагалица седам. На овом месту правимо корак уопштавања па питамо који је број већи, седам или четири. Путем оваквих вежби деца формирају представу о скупу првих десет природних бројева као уређеном скупу, тј. свака његова два различита члана су упоредиви – један је мањи од другог, односно други је већи од првог.

Као што представи о броју предходи представа о скупу, тако операцији сабирања претходи представа о унирању као скуповној операцији, кад од два дата скупа формира се трећи састављен од њихових елемената. Али у реалној настави то унирање не треба схватити као формални поступак, него су то активности везане за опажајно окружење. На пример, кад две групе објеката сложимо у једну, ми смо од два скупа формирали један – трећи, који садржи све њихове елементе и само њих. Али уместо активности слагања, унирање може бити само друкчије усмеравање пажње, рецимо, кад две групе објеката сагледавамо као да је једна. Такво сагледавање често је подстакнуто именовањем тих објеката и истицањем њиховог броја. На пример, на Сл. 10,



Сл. 10

видимо три парадајза и четири јагоде, када је наша пажња усмерена на два скупа, односно видимо седам плодова, када је наша пажња усмерена на један скуп (који је њихова унија). Бројање може бити повод да ова активност сагледавања тече спонтано, кад питамо: „Колико је парадајза, колико јагода, а колико је то укупно плодова?" Слично, кад уз Сл. 11,



Сл. 11

питамо колико је чаша са сламком, колико без сламке и колико је то укупно чаша. Опет на тај начин усмерава се пажња, прво на два скупа, а затим на њихову унију.

У контексту ове уводне теме, на питање „колико је?" одговара се бројањем (као најпримитивнијим видом рачунања). На питање „колико је то укупно?", опет се одговор даје путем бројања, па је главни циљ оваквих вежби да се подстиче представа о два дисјунктна скупа и њиховој унији. Такву представу зваћемо адитивна схема, а питање „колико је то укупно?" разумеваћемо као задатак сабирања. Све у свему, вежбе наведене уз горње илустрације (Сл. 10, Сл. 11) и све друге њима сличне, представљају један вид предигре за сабирање – развијање осећаја за адитивне схеме и разумевања смисла задатака сабирања. У остваривању тог циља, бројање бива само једна подесна подстицајна техника.

Служећи се скуповним језиком можемо рећи да *адитивну схему* чине два дисјунктна скупа и њихова унија, а *задатак сабирања* се састоји у томе да знајући бројеве елемената тих скупова, тражимо број елемената њихове уније.

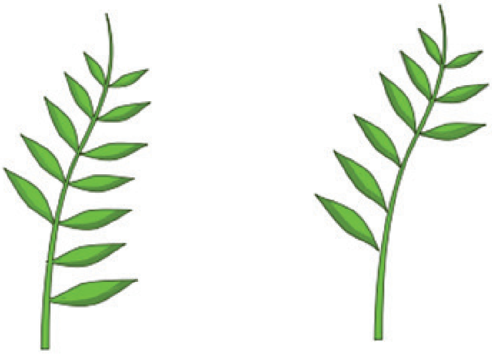
Представа о адитивној схеми претходи и операцији одузимања, само је *задатак одузимања* друкчији – знамо број елемената уније и једног од два скупа, па се тражи број елемената другог од њих. На пример, уз Сл. 10, кад кажемо: „плодова је седам, јагоде су четири, колико је парадајза?" имаћемо представу о једној адитивној схеми уз коју је формулисан задатак одузимања.

Дидактичка оправданост вежби сабирања и одузимања у контексту ове уводне теме, где деца још не пишу бројеве нити формално рачунају (сем на најпримитивнији начин, бројањем), састоји се у томе што она, путем ових вежби, формирају представе о адитивној схеми и што се навикавају на формулације задатака сабирања и одузимања, а да још нису оптерећена захтевима правилног записивања и формалног рачунања. Напоменимо, такође, да је у животним ситуацијама адитивна схема представа која стоји уз разне активности које описујемо говорећи „додато је“, „скупљено је“, „сабрано је“ итд., али и „одузето је“, „смањено је“ итд., зависно од два горе поменута задатка. Такве изразе треба схватити као опис разних манипулативних радњи са скуповима објеката реалног света, а не као операције са бројевима.

За сабирање, односно за одузимање везани су и задаци поређења, кад налазимо не само да један скуп има више (мање) елемената од другог, него и колико више (мање). Сматра се да ту врсту задатака теже деца усвајају, па ако их уврштујемо у ово предворје аритметике, они морају бити брижљиво припремљени тј. захтеваћемо да:

- два скупа које поредимо састоје се од исте врсте елемената,
- скуп са мањим бројем елемената је у видљивој (и природној) обострано једнозначној кореспонденцији са подскупом скупа који има више елемената,
- број елемената који преостаје иза те кореспонденције је мали и одредив на први поглед.

На пример, те услове испуњава задатак који чини Сл. 12,



Сл. 12

и питања: „С које стране петељке (показује се једна од две гранчице) има више (мање) листова?“, а затим се пита: „Колико више (мање)?“.

8. СХЕМА ПОЈМА

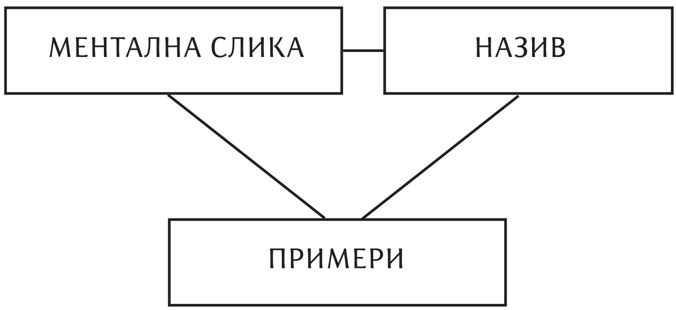
У овом излагању користићемо речи „идеја“ и „појам“ са разликом у значењу коју ћемо овде истаћи путем прецизирања значења друге од ових речи. Реч „идеја“ биће слободније коришћена да се означе оне апстракције које настају посматрањем одређене врсте односа или својстава. Тако, на пример, можемо рећи да се кроз активности пребројавања формирају идеје о почетним природним бројевима: један, два, три итд. Али активности путем којих формирамо појмове су потпуније и састоје се од издвајања објеката који ће бити основа за развијање значења неког појма; а контакт са тим објектима траје док се не развије у нашем уму унутрашња представа везана за те објекте и, коначно, појмове кодификујемо у подручју језика додељујући им речи којим их изражавамо (односно симболе којим их означавамо).

Деца у предшколском периоду развију низ појмова везаних за одређену врсту објеката у њиховом окружењу. Тако, на пример, ступајући у контакт са предметима као што су конкретни столови у њиховом свакодневном окружењу формирају, на спонтан начин, појам „стола“. Ти конкретни столови чијим се опажањем формира значење овог појма, називају се *примери* за тај појам. Учећи од одраслих, деца везују за те предмете реч „сто“, за коју кажемо да је *назив* за тај појам. А временом се у уму детета формира унутрашња представа која окупља нека карактеристична својства свих тих конкретних столова, који су се налазили у оквиру његовог искуства. Ову унутрашњу представу називамо *ментална слика* и њу је немогуће тачно описати, нити се она може поистоветити са било којом визуелном представом реалног света. Лакше је ређати својства која нису карактеристична као што је облик (постоје столови са три, четири или више ногу, са троугластом, четвртастом или округлом плочом итд.), боја (неки столови су браон, неки бели итд.), материјал од којег су грађени (неки столови су дрвени, други метални или пластични итд.). За укупност свих тих небитних својстава користи се у психологији термин „шум“. Дакле, шум представљају она својства која неки примери који одговарају неком појму могу да имају, а други не. А ми смо управо навели нека таква својства која прате појам „стола“ Може се рећи да деца имају формирану менталну слику кад она постане функционална, рецимо, у случају појма „сто“ кад као столове сврставају и оне објекте те врсте које први пут виде.

На врло сличан начин деца формирају низ других спонтаних појмова као што су „столица“, „чаша“, „тањир“ итд., а кад се њихово искуство прошири поласком у школу, то ће такође бити појмови као што су „табла“, „оловка“, „свеска“ итд. Напоменимо да човек формира нове спонтане појмове кад год се његово искуство шири, па се тај процес не ограничава ни на једно животно доба. По Л. С. Виготском (видети [Vy]) спонтани се појмови разликују од научних тиме што ови последњи чине системе у којима су међусобно везани разним релацијским везама. Видећемо да се као системи појмова могу узети блокови бројева до 10, до 20 итд. односно изградњом тих блокова бројеви се од самог почетка формирају као научни појмови. А кад, пак, на бројеве гледамо као на индивидуалне појмове, они се тада ничим не разликују од спонтаних. Тако, на пример, уз појам броја „три“, примери су сви трочлани скупови, језички код као назив за овај појам је реч „три“, а симболичка ознака цифра „3“, док менталну слику визуелно добро представљају три тачке (иако је с таквом представом не поистовећујемо).

Као што је то сасвим јасно, наша намера није да дајемо дефиницију шта је то појам. Истакнути француски математичар и филозоф, Рене Том каже да се појмови најбоље осмишљавају својим постојањем или, ако то мало друкчије схватимо, њиховом употребом. Оно што намеравамо да урадимо биће опис једне опште схеме која прати процес формирања појмова. Она је наша допуна једне такве схеме коју преузимамо из књиге [Sk_1] Р. Р. Скемпа.

Појам схватамо као трокомпонентну целину коју чине: *Примери*, *Ментална слика* и *Назив* (са могућом симболичком ознаком).



Сл. 13

Кад су примери објекти или ситуације реалног света, тада кажемо да је тај појам на *сензорном* (*опажајном*) нивоу. Већина појмова школске аритметике налази се на сензорном нивоу, али за неке апстрактније појмове, њихови примери могу бити и сами појмови мањег степена апстрактности. На пример, за појам природног броја, примери су појединачни бројеви: један, два, три, итд., а који су и сами појмови али мањег степена апстрактности. За два појма *A* и *B* кажемо да је појам *A* апстрактнији од појма *B* кад је појам *B* пример за појам *A*. Тако је појам „четвороугао" апстрактнији од појма „паралелограм", а појам „паралелограм" од појма „правоугаоник". Објекте реалног света не сматрамо појмовима, него за њих кажемо да су феномени. Дакле феномене опажамо, а појмове формирамо путем апстраховања. Ментална слика је представа која се формира у уму и за њу кажемо да интегрише својства која имају сви примери који одговарају неком појму. Но, то не значи да ми заиста можемо да издвајамо та својства, него се функција менталне слике своди на способност ума да везује речи које су називи за појмове са примерима који одговарају тим појмовима, и да разликује примере који припадају неком појму од оних који му не припадају.

Говорећи уопштено, својства која имају сви примери који одговарају неком појму називамо *битним* односно *карактеристичним* за тај појам. Небитна су она својства која неки од тих примера имају, а неки други немају. За таква својства, како смо то већ рекли, кажемо да представљају *шум*. Сад можемо са више прецизности рећи да је *идеограм* иконички знак којим представљамо неки појам, представљајући тим знаком неки његов пример који има што је могуће мање шума.

На крају овог излагања, напоменимо да Виготски користи термин *систем* да њиме означи једну класу појмова заједно са свим релацијама које их везују. Кад је такав систем формулисан у терминима скупова и скуповних релација, тада се он зове (математичка) *структура*. У психологији се, пак, под *менталном (когнитивном) схемом* подразумева спој међусобно повезаних менталних слика. Тако бисмо могли рећи да је ментална схема одраз у нашем уму неког система појмова.

Ово опште излагање о појмовима и њиховим системима укључили смо да претходи излагању аритметичких тема као што су блокови бројева. Те блокове чине појмови појединачних бројева са свим релацијским везама које се изражавају путем аритметичких операција, па су тако прави примери система појмова чија је изградња главни задатак наставе аритметике.

9. БЛОК БРОЈЕВА ДО 10

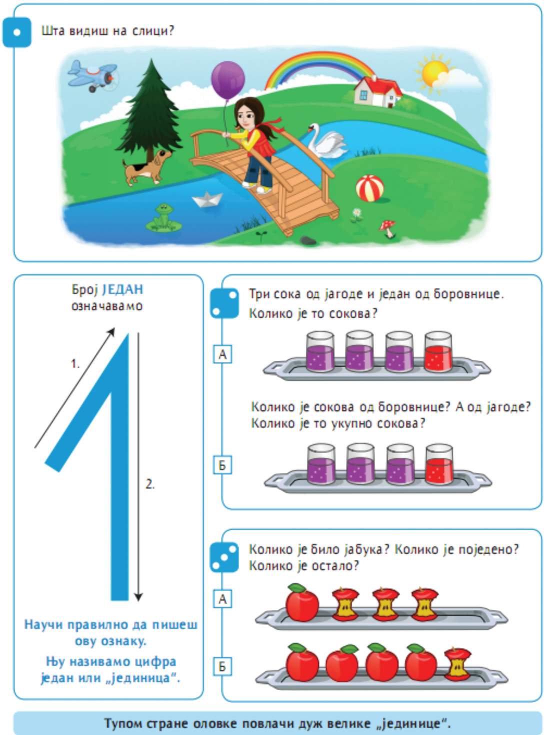
Сваки од бројева један до десет заслужује да му се посвети посебна лекција у којој се његово значење развија зависно од представа о скуповима који служе као одговарајући примери, али се тај број такође везује и за друге бројеве који му претходе изражавајући те везе у виду одговарајућих збирова и разлика. На тај начин овај блок се формира као адитивна структура, а тим путем се такође спонтано запамћује таблица сабирања до 10.

Постоји једна општа тенденција да се курсеви дидактике математике затрпавају разним садржајима у знаку теоретисања, па се узима да се на тај начин подиже њихов академски ниво. Та теоретисања често имају мало додира са реалним токовима наставе, и ако се неки мањи број примера ту нађе, они су крајње недовољни да створе једну потпунију представу о корисности прокламованих ставова и укупном обликовању наставних тема. Кад излагање почне да подсећа на дидактичка обликовања каква се виде у уџбеницима, то се тада сматра падом нивоа и активношћу која је недостојна једног теоретичара (чије ће идеје други разрађивати, а ако то није успешно, ти су други криви за недовољно разумевање).

Као што се лако наслућује, наши погледи су сасвим другачији и иду одоздо нагоре, јер ми сматрамо да је сваки теоријски став без своје основе у конкретним садржајима празна умотворина, која је као таква нека врста интелектуалног насиља. Зато, ми узимамо да је *егземплирање доказивање вредности изведеног става,* а не пад академског нивоа. Па, та наша тежња да не губимо везу са конкретним садржајима, овде нас води у скицирање дидактичке разраде садржаја овог блока, а примере које ћемо обухватити рефлектоваће неке опште дидактичке ставове и процедуре.

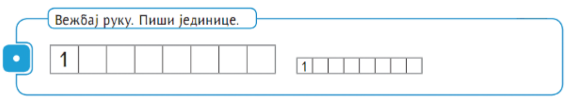
Може изгледати претерано да се наставној јединици „Број један“ посвете један до два школска часа, али надам се да ће се читаоци лако сложити са мном да то није тако. „Отворимо“ почетну страницу лекције „Један“.

У првом примеру на слици 14 виде се објекти разне врсте али свуда по један од њих. На наставниково питање шта се све види на тој слици одговара се коришћењем речи „један“ (а што иначе наставник сугерише): једна кућа, једно дрво, један мост итд. Напоменимо да су те вежбе усмеравања пажње на један објекат (при чему све друго што је у видном пољу остаје у позадини) такође значајне вежбе психолошке природе.



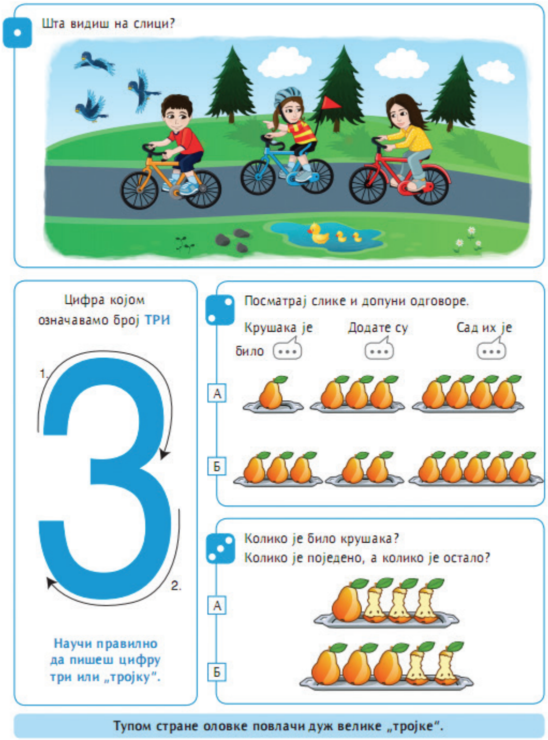
Сл. 14

У другом и трећем примеру број „један" се јавља у улози сабирка и умањиоца само што се то ради на конкретан начин, при чему је ученик ослоњен на значење чија су основа дате слике и где се одговори добијају бројањем. Овде се такође види значај бројања као уводне теме аритметике, која ће трајати све дотле док не почне рачунање у правом смислу (а о томе ћемо говорити касније на за то одговарајућем месту). Са сличним примерима (и у оквиру скупова чија бројност не прелази пет) ова, или овакве две лекције, имаће довољно битног садржаја за разраду. Писање „јединице" иде у два потеза, који су представљени стрелицама. Ове потезе деца прво изводе повлачењем тупе стране оловке као предигру за писање јединице. Затим се из допунског радног материјала задаје писање јединице оловком, уписивањем у веће и мање квадратиће чиме се рука присиљава на контролисано повлачење мањих потеза:



Сл. 15

Слично теку лекције за осталих пет бројева од 1 до 5. На слици 16 види се део такве лекције посвећене броју „три“.

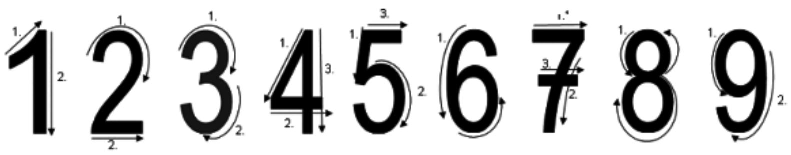


Сл. 16

Видимо да се у примеру 2 илуструје ситуација која се схвата као адитивна схема, а текст упућује на задатак сабирања. Сама активност је слагање крушака са прве две тацне на трећу па је то, формално гледано, унирање скупова, а питање „сад их је“ упућује на задатак сабирања који се у овој фази своди на бројање. То је интерпретација за ова два иконичка представљања (под А) и Б)). Гледајући на цртеже крушака као на иконичке знакове, можемо узимати да ти цртежи у случају прве две тацне припадају једном, а они у случају треће тацне другом иконичком домену, а то одговара представљању ових двеју ситуација (пре и после преслагања) као да се дешавају у два различита тренутка. Ако, пак, све то гледамо у оквиру једног иконичког домена, тада цртежи крушака на трећој тацни су различити иконички знаци од цртежа тих крушака на првим двема тацнама. Ти знаци представљају исте крушке али у различитим положајима, па тако јесу различити иконички знаци који стоје на различитим местима.

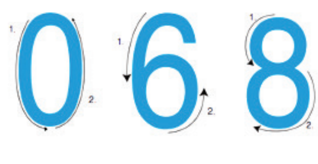
У вежби 3, адитивну схему прати задатак одузимања „било је, па је остало“ који се такође решава бројањем, а у првом случају (под А)) број „три“ је у улози умањиоца, док је у другом случају (под Б)) у улози разлике. На овај начин међусобно се везују бројеви до 5, али не говоримо, нпр., три и два су пет (јер још није обрађивана операција сабирања одвојено од конкретних значења) него се изражавање веже за конкретне скупове именовањем њихових чланова па се каже, нпр., „три крушке и две крушке су пет крушака“.

9.1. *Правилно писање цифара.* Све цифре пишу се једним, два или највише у три потеза. Но, прво рецимо прецизно шта значи један потез. То је непрекидно кретање врха оловке док то кретање не стане, да би се променио правац писања или се пренео врх оловке на неко друго место. На следећој слици (Сл. 17) стрелице показују ток и редослед потеза којим се правилно пишу цифре.



Сл. 17

Само писање почиње идући слева надесно и одозго надоле. Наравно да је боље и за децу и наставника да писање од почетка тече на правилан начин, него ли да се лоше навике касније исправљају. Ми предлажемо вежбања која почињу кретањем руке по назначеним стрелицама, али те вежбе руке обухватају писање цифара већег и мањег формата. Више пута ти тако поновљени покрети запамћују се, а њиховим понављањем и сами теже све већој правилности (тј. писање постаје увежбаније и лепше). Напоменимо да није никаква озбиљна грешка ако се неки потез разбије на два – случај кад рука иде надоле и кад иде нагоре. То може да буде, на пример, кад се пишу цифре нула, шестица и осмица:



Сл. 18

9.2. *Поређење по бројности.* Кад су завршене лекције посвећене бројевима од 1 до 5, те бројеве почињемо да сматрамо апстрактним појмовима и да с њима тако и оперишемо, а на реду је њихово поређење по величини. Но, прво се пореде парови скупова са истородним члановима и постављају питања где је тих чланова више. Наставник потврђује одговоре коментаришући, нпр., „да, овде је више крушака – њих је 5, него тамо где су 3 крушке“ и сл. Затим се намерно заборавља на именовање чланова скупова, па се у поређењу говори само о бројевима тих чланова и каже се „да, пет је веће од три“ и сл. Ово је случај *форсирања апстракције*, а у том процесу начин изражавања игра значајну улогу. То форсирање се испољава и писањем једног од два знака „веће“ или „мање“ између два броја. Искуство говори о томе да деца теже разликују ова два знака, па и кад пореде бројеве коректно, праве грешку изражавајући тај однос симболички. Тако се јавља дидактички задатак да се истакне на „жив“ начин разлика између два знака „>“ и „<“. На слици 19. асоцирају се два отвора ових знакова са отворима кљуна роде.

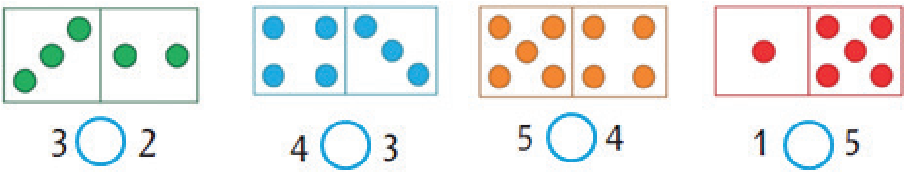
Рода отвара кљун на ону страну где је више плодова.

Знаци > и < се отварају према већем броју.

Сл. 19

Каже се да се погледају илустрације и види како рода отвара кљун на страну где је више плодова, а да се и знакови „>“ и „<“ „отварају“ према већем броју (и то буде основа на којој наставник исправља погрешно писање ова два знака).

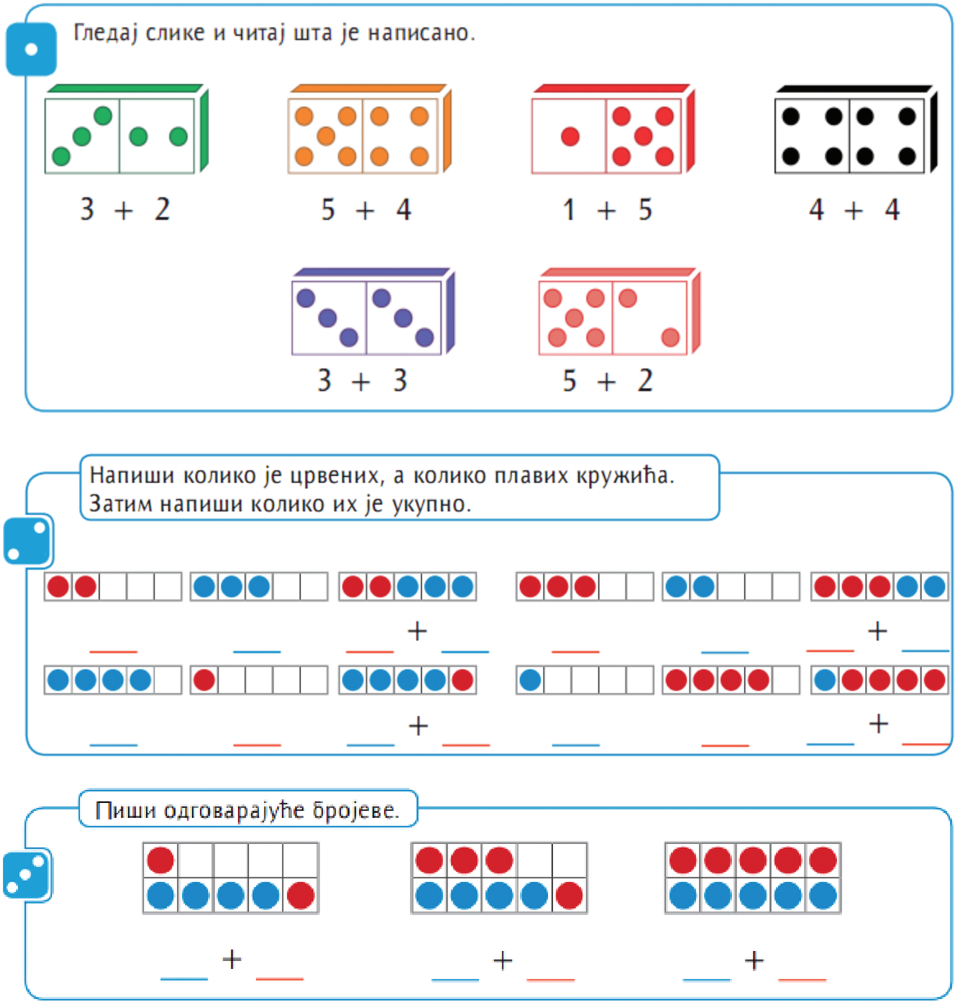
Вежбе уз ову наставну јединицу чине парови скупова чији се бројеви елемената пореде, а испод се пише одговарајућа неједнакост (при чему се слике гледају слева на десно, а тим редоследом испод њих пишу бројеви њихових елемената са празним местом између тих бројева, остављеним за један од знакова „>“ или „<“).



9.3. *Операције сабирања и одузимања.* Поновимо да је адитивна схема представа везана за опажање два скупа без заједничких чланова и трећег који је њихова унија (при чему се тај трећи скуп замишља као обједињавање чланова та два дата скупа или се формира путем њиховог груписања на истом месту). Сам задатак сабирања састоји се у томе да се претпоставља да знамо бројност та два скупа, а да се тражи бројност трећег који је њихова унија. Као први корак у обради наставне јединице сабирања је само записивање, које се састоји од коришћења знака „плус“ и састављања збира као записа коме је претходила представа о два скупа, које тим записивањем истичемо да их замишљамо као један трећи. Такав почетни корак у овој обради илустрован је сликом 20, где је и текст којим се казује како се записи који се овде уводе читају.

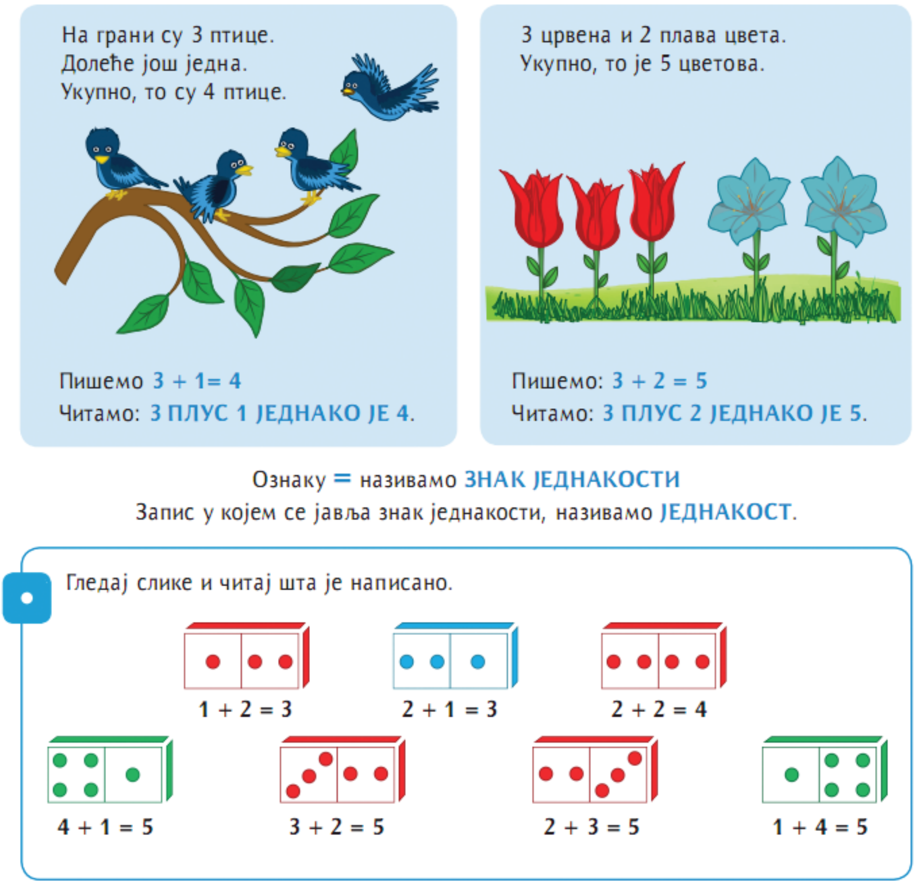
Сл. 20

Писање збирова је један корак у обради сабирања и врло је значајно одвојити га од „рачунања“, тј. од питања „а колико је то“, које тада подразумева цифарско записивање укупног броја чланова. Зато активност записивања збирова (без рачунања) треба истаћи као значајан корак и посветити јој одређен број вежби, као што су ове на слици 21.



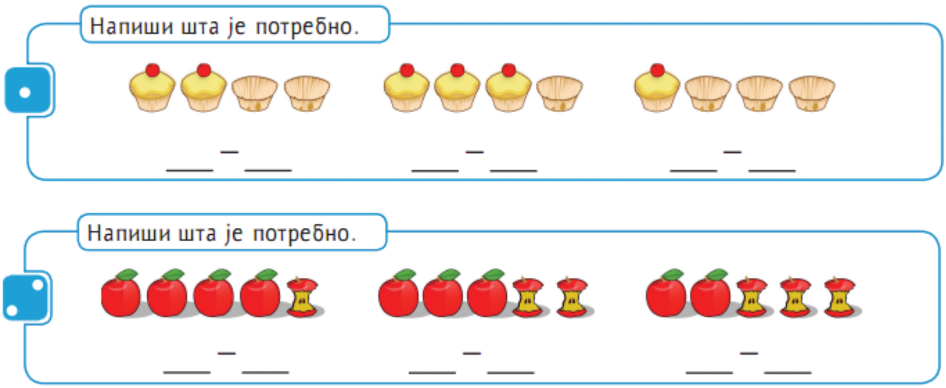
Сл. 21

9.3.1. *Знак једнакости.* Кад се два скупа узимају као њихова унија пише се збир, нпр., 2 + 3, а кад се бројност те уније изражава цифарски, пише се цифарски запис тог броја, нпр., 5. Тако имамо две различите ознаке за један те исти број (овде у нашем примеру, број „пет“). Кад се истиче да те ознаке представљају исти број, тј. кад се оне на тој основи једначе, пише се знак једнакости између њих (нпр., пише се 2 + 3 = 5). Како је сваки број једнак само самом себи, *не треба знак једнакости схватати као једначење бројева него као једначење различитих ознака за један те исти број*. Као један пример почетка обраде наставне јединице „Знак једнакости“ могу да послуже вежбе дате на слици 22.



Сл. 22

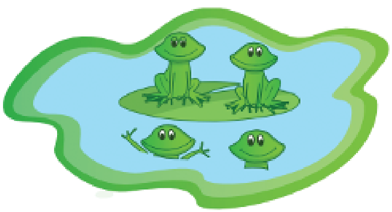
Одузимање се такође обрађује у два корака – означавање писањем разлике и једначењем те ознаке са цифарским записом. Вежбе уз овај први корак могу бити попут ових на слици 23.



Сл. 23

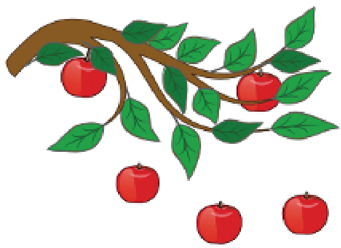
Наравно писању разлике претходи представа о адитивној схеми уз коју је сугерисан задатак одузимања, а који можемо овако изразити: зна се бројност уније и једног од скупова, а тражи се бројност оног другог. А кад се бројност тог другог скупа изрази путем цифарског записа, тада имамо опет два различита записа које једначимо, а што се види као процедура илустрована на следећој слици:

На локвању су седеле четири жабе.
Две су скочиле у воду.
Остале су две жабе.



Пишемо: **4 – 2 = 2**
Читамо: **4 МАЊЕ 2 ЈЕДНАКО ЈЕ 2**

Било је 5 јабука.
3 су опале.
Остале су 2.



Пишемо: **5 – 3 = 2**
Читамо: **5 МАЊЕ 3 ЈЕДНАКО ЈЕ 2**

Ознаку **—** називамо **знак МИНУС** или знак **„МАЊЕ“**

Сл. 24

Уз одузимање природно долази и обрада нуле као броја, а чији се смисао веже за „празно место“, бројањем уназад или одузимањем док „ништа не остаје“. На слици 25 илустрована је таква једна ситуација.

Посматрај слике.

На првој тацни су 4 колача, на другој 3, на трећој 2, на четвртој 1.
На последњој тацни нема колача. Можемо рећи да нема **НИЈЕДАН** колач.

Да то означимо, пишемо ознаку **0**, коју читамо **НУЛА**.

Сл. 25

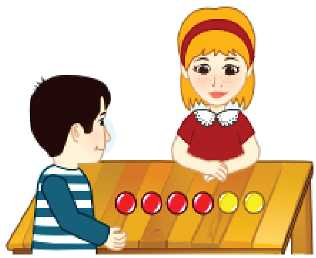
Примећује се да блок бројева до 10 раздвајамо на два дела – бројеви до 5 и они од 6 до 10. Са осмишљеном операцијом сабирања уводе се: број 6 као 5 + 1, број 7 као 6 + 1 али и као 5 + 2, број 8 као 7 + 1 и 5 + 3, број 9 као 8 + 1 и 5 + 4 и број 10 као 9 + 1 и 5 + 5. Први од ових збирова одговарају бројању по један, а други сабирању где се јављају збирови који се лепо интерпретирају путем бројевних слика, па се због тога и лако памте.

А Посматрај слику.

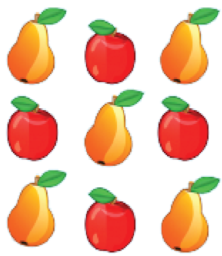
Миша и Сања су писали колико имају жетона.

Миша је писао: Сања је писала:

4 + 2 = 2 + 4



Б Посматрај слику на два начина.



Јабука је 4
Крушака је 5
Укупно плодова је: 5 + 4 = 9

Крушака је 5
Јабука је 4
Укупно плодова је: 4 + 5 = 9

Кад срачунаш 5 + 4 = 9 и без рачунања можеш писати 4 + 5 = 9

Уочаваш правило: **КАД САБИРЦИ ЗАМЕНЕ МЕСТА ЗБИР СЕ НЕ МЕЊА!**

Сл. 26

Како је лакше бројати од 7 до 9 него ли од 2 до 9, тако је лакше видети шта је збир 7 + 2 него ли 2 + 7. Али оваква два различита записа истог броја зависе од начина груписања, наиме једном видимо скуп са 7 и скуп са 2 члана, а други пут обрнутим редом, скуп са 2 и скуп са 7 чланова. По Канторовом принципу, број не зависи од начина груписања чланова неког скупа, па такве записе можемо да једначимо и, нпр., пишемо 2 + 7 = 7 + 2. Илустрације и текст на слици 26 намењени су почетној обради овог правила, које називамо *правилом о размени места сабирака* (а формалније, у математици, комутативним законом за сабирање).

9.3.2. *Коментар.* Важно је схватити да је ово правило, о коме је овде реч, један од принципа аритметике. А принципи се не доказују, него се прихватају као фундаменталне истине и на основу неке темељне интуиције, коју овде уобличава Канторов принцип као општији од овог правила.

Наставник не би нипошто смео да упада у наивну процедуру провере овог правила рачунањем једног броја збирова са измењеним редоследом сабирака. Оно што треба да ради је давање вежби, где се ово правило примењује ради лакшег „рачунања“. На пример: 3 + 7 = ___ + ___ = ___ итд. односно кад се то компресује и оставља размена сабирака као усмена операција, да тада задаје: 3 + 7 = ___, 2 + 6 = ___ итд.

Приметили сте да кад говоримо о рачунању збирова (или разлика) ми ту реч стављамо под наводнике. Разлог је што се овде још не јављају никакве праве процедуре рачунања, него се једначе записи тако што се или непосредно види који је то број који представљају или се, пак, то утврђује бројањем. Наставник је свестан колико је бројање важна уводна тема аритметике и да је оно као основна процедура овде у потпуности заступљено.

10. ШТА ЈЕ ФРОЈДЕНТАЛОВА ДИДАКТИЧКА АНАЛИЗА?

Често се сматра да су садржаји математике нешто једном заувек фиксирано и да наставник треба да добро научи те садржаје и да овлада вештином њиховог преношења. Ова сувише поједностављена представа, а и честа заблуда, је последица неразликовања математике као науке и њене дидактичке трансформације, која знатно превазилази „голе“ предметне садржаје.

Сходно опште прихваћеном принципу да онтогенетски развој прати филогенетски, извесно познавање историјског развоја идеја које улазе у наставне садржаје битно је за наставника, а неопходно за стручњака који се бави образовањем.

Наставник разредне наставе треба да продубљеније зна основе средњошколске математике – теорију скупова, математичку логику, бројевне системе, укључујући ту и школску алгебру, и то на начин који би био рекапитулација оног што је и сам учио у школи са истицањем главних идеја, док би техника остајала у другом плану. То ће такође пооштрити значење математичких појмова, а што се не може постићи у развојном периоду кроз рану наставу математике.

Ослањајући се на историју математике и школства, на дубоко познавање математике као науке Ханс Фројдентал у својим књигама: [Fr_1] и [Fr2] подвргава детаљној анализи неке од главних тема школске математике. То такво рашчлањивање математичких садржаја и сугерисање њиховог дидактичког обликовања Фројдентал назива *дидактичка анализа*. Могло би се са пуним правом рећи да је дидактичка анализа основношколске математике пројект за будућност, док се данас настава математике на том почетном нивоу налази у рукама многих „експерата“, који ту наставу третирају једнострано, не схватајући да је структурисање тих садржаја први и најважнији корак. На том почетном нивоу знање се синтетизује на основи коју чине опажање и добро усмерено процесирање опажајног материјала. А то усмеравање могу да врше само они који познају математичке садржаје на продубљенији начин и добро схватају когнитивне процесе, уважавајући све развојне факторе.

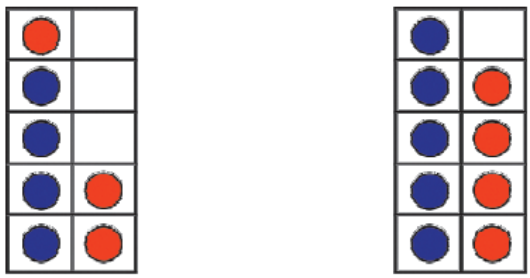
У следећој тачки овог чланка подвргнућемо дидактичкој анализи тему „блок бројева до 20“.

11. БЛОК БРОЈЕВА ДО 20

Блок бројева до 10 је, наравно, део блока бројева до 20. Тих првих десет бројева, заједно са нулом, имају фундаментални значај за изградњу декадног бројевног система, пошто се сваки природни број представља као збир производа декадних јединица и бројева из скупа {0. 1. ,,, .9}, (видети одељак 6). Такође у оквиру овог првог почетног блока успоставља се значење операција сабирања и одузимања, а такође се ту формира део таблица сабирања и одузимања. Сви улази у те таблице запамћују се на спонтан начин, путем већег броја вежби (а такође ту своје место имају и иконичке представе о бројевним сликама). За збирове и разлике у оквиру блока до 10 говорићемо фигуративно да су „мали“ односно „мале“, а то знање је основа на којој се рачунају збирови и разлике у оквиру већег блока бројева до 20.

Кад се уз исту адитивну схему спарују одговарајући задаци сабирања и одузимања, то чини лакшим запамћивање разлика уз одговарајуће збирове и обратно, али је то такође истицање међузависности операција сабирања и одузимања на процедуралан начин. Један такав пример је следећа вежба:

Попуните шта се захтева



___ + ___ = 7	___ + ___ = 9
___ + ___ = 7	___ + ___ = 9
7 – ___ = ___	9 – ___ = ___
7 – ___ = ___	9 – ___ = ___

Сл. 27

Путем већег броја оваквих вежби, обухватајући (више пута) све улазе у таблице сабирања и одузимања, уче се спонтано те таблице у оквиру бројева до 10. Одмах рецимо да је главни дидактички задатак везан за блок бројева до 20, формирање и спонтано запамћивање комплетних таблица сабирања и одузимања, а овај блок је природна целина у оквиру које се тај задатак реализује.

Сигурно ће већина деце у сваком разреду знати да броји бар до 20. Али кад је циљ једно кохерентно излагање аритметике, такво знање нећемо сматрати сувишним, али нећемо га узимати ни као основу за проширење блока бројева до 10. Такву основу чиниће збирови: 10 + 1, 10 + 2, … , 10 + 10 који имају успостављен смисао у оквиру тог блока – једна група од 10 објеката и друга од 1, 2, … , 10 објеката, али ти збирови немају своју вредност (тј. свој декадни запис) у оквиру тог блока. Сад деца уче да се ти збирови краће записују као: 11, 12, … , 20 и читају: *једанаесӣ*, *дванаесӣ*, … , *двадесеӣ*, при чему наставник води рачуна да се називи ових бројева правилно изговарају, пошто се у свакодневном говору често чује један њихов овлашни тј. неправилни изговор. У складу са схватањем бројева 11, 12, … , 20 као збирова броја 10 и бројева 1, 2, … , 10 одговарајуће бројевне слике које их представљају састоје се од једне слагалице „10“ и једне друге која представља бројеве 1, 2, … , 10 (Одељак 4, Сл. 3). На крају једнакости

$$10 + 1 = 11, \quad 10 + 2 = 12, \ \dots \ , \ 10 + 10 = 20$$

имају као основу једначење две различите ознаке за један те исти број, па их такође можемо сматрати да су то најједноставнија сабирања у новом оквиру бројева до 20.

11.1. *Правило здруживања сабирака.* Кад су објекти неког скупа груписани у три његова дисјунктна подскупа A, B и C који имају, редом, l, m и n елемената, тада укупан број елемената тог скупа можемо записати у виду *ӣросӣрукоī збира* $l + m + n$, где l зовемо *ӣрви*, m *друīи* а n *ӣрећи сабирак*. Питање колика је вредност тог збира, у овој почетној фази, налазила би се искључиво путем пребројавања све док се не успоставе везе са двоструким збировима. Но прво треба представу о три скупа свести на представу о адитивној схеми, а то можемо урадити на два начина: као $A \cup B$ и C или као A и $B \cup C$. Тада број елемената тог скупа записујемо као $(l + m) + n$ пратећи прву представу, а као $l + (m + n)$ пратећи другу. Једначећи ова два записа имаћемо једнакост

$$(l + m) + n = l + (m + n).$$

Ова једнакост изражава својство троструког збира које у дидактици математике називамо *ӣравило здруживања сабирака*, а у математици као науци за то својство кажемо да представља *асоцијаӣивни закон*.

Сваки од два израза $(l + m) + n$ и $l + (m + n)$ може се видети као збир два броја, рецимо, први од њих као збир бројева $(l + m)$ и n , а ту је $(l + m)$ први сабирак док је n други. Ово нам указује да правило здруживања сабирака има битан значај, јер нам збирове три броја (или више њих) своди на збирове два броја. Говорећи језиком математике, сабирање третирамо као бинарну операцију, а кад се та операција изводи у два (или више) корака ти кораци се истичу писањем заграда.

После ове општије анализе сагледајмо како овај садржај треба да се обрађује у реалној настави у разреду. Посебно је значајно да деца почну да схватају функцију заграда, при чему се не очекује да их она и пишу и да их користе у састављању сложенијих израза. Довољно је да у почетку деца схвате заграде као команду „израчунај прво оно што је у заградама“, пратећи програмиране задатке у којима се кораци у одређеним процедурама разлажу у намери да се такве процедуре што боље разумеју. Обрада може да почне са примерима као што је овај:

Посматрај следећи скуп кружића:

Сл. 28

Гледај шта пишемо кад се

плави и зелени кружићи групишу *зелени и црвени кружићи групишу*

(2 + 3) + 4 2 + (3 + 4)

Сл. 29

Запис (2 + 3) + 4 *читаш: отворена заграда,* 2 *плус* 3, *затворена заграда, плус* 4, *а запис* 2 + (3 + 4) *читаш:* 2 *плус, отворена заграда,* 3 *плус* 4, *затворена заграда*
Пошто записи (2 + 3) + 4 *и* 2 + (3 + 4) *означавају један те исти број, можеш да их једначиш и пишеш*

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4).$$

Кад се уради један број сличних примера, тада се може исказати правило да *сабирке можемо различито здруживати не мењајући вредност збира*. Кад се неко правило искаже речима на овај начин, говорићемо да је то *реторичко изражавање*, а овај термин веже овај поступак изражавања за све оне који су некад постојали у реторичкој алгебри. С друге стране изражавање правила кроз конкретне примере, као што би у претходном случају била замена три броја са било која друга три из блока до 20, зваћемо *процедурално изражавање.* У овом термину не треба тражити никакву негативну конотацију, (а коју прати термин процедурално учење), јер је ово изражавање слично оном које је постојало у алгебри пре него што се појавила словна алгебра Виета. Изражавање путем словних израза чини ту жељену општост, али она не мора да буде циљ наставе аритметике на овом сасвим почетном нивоу.

Да би деца употпуности схватила функцију заграда могу им се наменити вежбе попут следеће:

Израчунај збирове

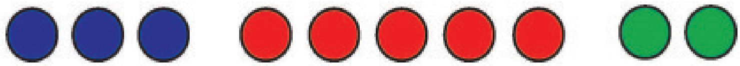
$(2 + 3) + 5 =$ __ $+$ __ $=$ ___, $(6 + 4) + 7 =$ ___ $+$ __ $=$ ___, $5 + (8 + 2)$ $=$ __ $+$ ___ $=$ ___, $10 + (4 + 3) =$ ___ $+$ __ $=$ ___, $(5 + 5) + 8 =$ ___ $+$ __ $=$ ___, *итд.*

Напоменимо да комбинујући правило здруживања сабирака са правилом размене места сабирака, можемо извести низ једнакости које уопштавају правило здруживања сабирака, истичући да се то *здруживање може вршити произвољним редоследом сабирака.* Заиста то показују следеће једнакости где прелазећи са једне на следећу примењујемо само једно од ова два правила.

$$(l + m) + n = l + (m + n) = l + (n + m) = (l + n) + m = (n + l) + m = n + (l + m)$$
$$= n + (m + l) = (n + m) + l = (m + n) + l = m + (n + l) = m + (l + n) = (m + l) + n.$$

Радећи са конкретним вредностима за l, m и n, вежбе ове врсте могле би се изводити у реалној настави, уз извесну помоћ самог наставника. Али могуће је такође здруживање различитим редоследом самих скупова, при чему се записи уз два различита редоследа једначе. Наведимо један пример те врсте:

Посматрај следећи скуп кружића



Сл. 30

Плавих кружића је 3, *а црвених и зелених* 5 + 2. *Укупно, то је* 3 + (5 + 2) *кружића. Зелених и плавих кружића је* 2 + 3, *а црвених* 5. *Укупно, то је* (2 + 3) + 5 *кружића. Пошто записи* 3 + (5 + 2) *и* (2 + 3) + 5 *означавају један те исти број, можеш да их једначиш и пишеш*

$$(2 + 3) + 5 = 3 + (5 + 2).$$

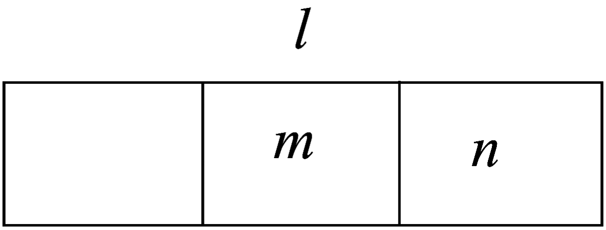
Варирајући текст и једначећи било која два здруживања три сабирка троструког збира и било којим редоследом, тим путем се изражава ово генералисано правило. У том облику то правило је и оперативније него што су, одвојено узето, правила размене сабирака и здруживања сабирака.

11.2. *Коментар.* У већини програма за први разред основне школе, могу се видети теме „комутативни закон“ и „асоцијативни закон“. У својим курсевима методике математике, наставници нису никад имали укључену дидактичку анализу ових тема, па су често збуњени чињеницом да се придаје толики значај својствима која ови закони изражавају, а која им иначе изгледају као потпуно очигледна. То, наравно, повлачи и њихову несналажљивост у обради ових својстава, па једна нешто детаљнија анализа овог садржаја свакако има своје место у контексту овог чланка.

Интересантно је да се сагледа и историјски аспект и истакне да су математичари, све до почетка 19. века, и сами узимали својства комутативности и асоцијативности сабирања (и множења) као нешто што се само по себи подразумева, па их никад нису ни истицали. Прво место кад се јављају термини који означавају ова својства је чланак Ф. Ж. Сервоа у *Ann. De Math.*, 5, 1814/1815. Подсетимо да у првој половини 19. века почињу да се формирају системи аксиома на којима се темељи симболична алгебра (Г. Пикок, Д. Ф. Грегори, А. де Морган и др.). Користећи језик савремене алгебре, аксиоме за Абелову групу чине минимум својстава из којих се сва друга својства сабирања и одузимања могу извести. Напоменимо и то да се на основу тих аксиома разлика дефинише као збир, у коме је други сабирак супротни елемент од елемента који се узима као умањеник, тј. пише се $a - b = a + (-b)$. Ипак, та вештина извођења није нешто што се систематски учи у школским курсевима алгебре, а читалац који би користио аксиоме Абелове групе да изведе, рецимо, релацију $l-(m+n)=(l-m)-n$, видеће да то није неки сасвим једноставни, рутински задатак.

Пошто се комутативни и асоцијативни закони јављају као две аксиоме за Абелову групу, тиме се истиче њихова фундаментална улога, али они нису довољни да се на основу њих утемеље (изведу) сва друга својства сабирања и одузимања, која би се користила за утврђивање легитимности процедура које се јављају у оквиру блока бројева до 20. А сад ћемо успоставити два својства која су изводљива из аксиома Абелове групе, али нису кад би се користили само комутативни и асоцијативни закон. Уместо апстрактнијег језика скупова, користићемо се моделима које ће чинити кутије са кликерима у боји.

У кутији се налаз l кликери, њих m су плави, а њих n зелени. Сви остали су црвени.



Сл. 31

Укупно има $m + n$ плавих и зелених кликера, Црвених је $l-(m+n)$. Кад се плави кликери издвоје, остаје $l-m$ кликера. Кад се и зелени кликери издвоје, остају црвени и њих је $(l-m)-n$. Кад се два записа за број црвених кликера изједначе, добија се једнакост

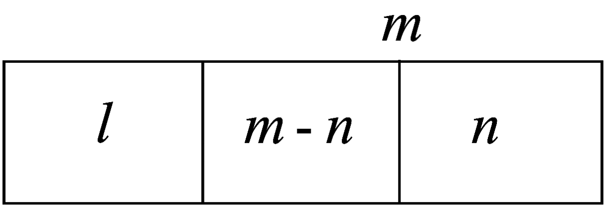
$$l-(m+n)=(l-m)-n.$$

Добијену једнакост називамо *правилом одузимања збира од броја*. Из природе самог модела следи претпоставка да је $l \geq m + n$, а то има смисла истицати да би изрази који се појављују у горњој једнакости били са значењем у скупу природних бројева. Запазимо да кад се неко правило изражава у виду словних израза то тада значи да оно важи за све бројеве које та слова означавају. С друге стране *перманенција својстава која пра-*

вила у виду словних записа изражавају је непосредна при прелазу са једног бројевног система на шири. На пример горња једнакост важиће и кад су l, m и n три рационална или три реална броја.

Изведимо сад још једно својство одузимања, користећи сличан модел овом претходном.

У кутији је l *црвених* и m *плавих и зелених кликера, а само зелених је* n.



Сл. 32

Укупно, то је $l + m$ *кликера. Кад се издвоје зелени кликери, остаје* $(l + m) - n$ *црвених и плавих. Црвених кликера је* l, *а плавих је* $m - n$. *Црвених и плавих је* $l + (m - n)$. *Једначењем два записа за број црвених и плавих кликера, добија се једнакост*

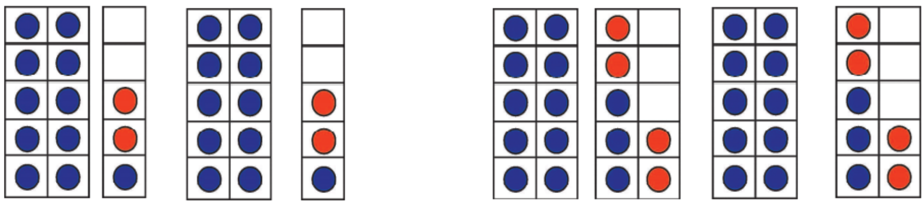
$$(l + m) - n = l + (m - n).$$

Добијену једнакост називамо *правилом одузимања броја од збира*, а из природе самог модела следи да је $m \geq n$.

Поновимо опет да провера асоцијативног закона рачунањем у неколико посебних случајева, као нпр. $(3 + 2) + 5 = 5 + 5 = 10$, $3 + (2 + 5) = 3 + 7 = 10$ итд. је знак потпуног неразумевања природе ових садржаја, а исто смо рекли и у Коментару 9. 3. 2.

11.3. *Прва права рачунања.* Иако врло једноставна, прва рачунања су случајеви сабирања (одузимања) кад је први сабирак (умањеник) број између 10 и 20, а други сабирак (умањилац) једноцифрен, при чему збир (разлика) остаје такође између 10 и 20. Методе рачунања имаће као ослонац иконичке представе, а чиниће их једно „мало“ сабирање (одузимање) и једно „лако“ сабирање са 10 као првим сабирком. Наведимо два примера таквог сабирања (одузимања).

Гледај слике и оно што је написано



11 + 2 = 10 + (1 + 2)

= 10 + 3 = 13

13 – 2 = 10 + (3 – 2)

= 10 + 1 = 11

13 + 4 = 10 + (3 + 4)

= 10 + 7 = 17

17 – 4 = 10 + (7 – 4)

= 10 + 3 = 13

Сл. 33

Увежбавање ових метода иде путем за то програмираних примера са постепеним повећањем броја бланш места која треба испунити.

Попуњавај шта треба

15 + 4 = 10 + (5 + 4) = 10 + __ = ___, 13 + 6 = 10 + (__ + __) = 10 + __ = ___,

13 + 7 = ___ + (__ + __) = ___ + __ = ___, *итд.*

19 – 3 = 10 + (9 – 3) = 10 + __ = ___, 18 – 5 = 10 + (__ - __) = 10 + __ = ___,

17 – 6 = ___ + (__ - __) = ___ + __ = ___, *итд.*

Истицање свих међукорака води потпуном разумевању неке методе, док се компресијом тих међукорака постиже брже рачунање. Том бржем рачунању намењују се вежбе попут ове:

Рачунај збирове

12 + 7 = 10 + 9 = ___, 12 + 8 = ___ + ___ = ___, 14 + 5 = ___ + __ = ___, *итд.*

Рачунај разлике

$19 - 5 = 10 + 4 =$ ____, $17 - 4 = 10 +$ __ $=$ ____, $18 - 4 =$ ____ $+$ __ $=$ ____, *итд.*

Посматране независно од иконичких представа, ове методе би се заснивале на правилу здруживања сабирака, односно, на правилу одузимања броја од збира. На пример,

$$14 + 5 = (10 + 4) + 5 = 10 + (4 + 5) = 10 + 9 = 19,$$

односно

$$18 - 6 = (10 + 8) - 6 = 10 + (8 - 6) = 10 + 2 = 12.$$

Но, такво рачунање, које није наслоњено на непосредне иконичке представе, није примерено узрасту ученика првог разреда сем кад нека метода прелази у фазу њене добре увежбаности. Па, може се поставити питање чему служе наставне теме „комутативни“ и „асоцијативни“ закон у програмима математике за тај разред. Мислимо да је то јасно истакнуто у претходном излагању, па сад то поновимо још једаред – размена места сабирака своди незгодније збирове за рачунање у којима је први сабирак мањи од другог, на оне згодније у којима је обратно, први сабирак већи од другог. Правило здруживања сабирака своди троструке (и вишеструке) збирове на двоструке и операцији сабирања даје бинарни карактер, а то значи да ће се сва својства сабирања изражавати у терминима двојних збирова, као што ће и сви улази у таблицу сабирања бити двојни збирови.

Најзначајнији случајеви сабирања у блоку бројева до 20 су они кад су сабирци једноцифрени бројеви, а њихов збир је већи од 10. Слично, код одузимања у овом блоку, најважнији су случајеви кад је умањеник двоцифрен број, умањилац је једноцифрен, а разлика је мања од 10. У оба ова случаја користићемо бројевне слике са плавим и црвеним кружићима које ће представљати адитивне схеме. Задатке сабирања и одузимања учинићемо динамичнијим говорећи у случају сабирања о додавању кружића, док ћемо у случају одузимања говорити о њиховом скидању.

Код ових метода сабирања и одузимања, као један од корака јавља ће се разлагање једноцифрених бројева на сабирке, па томе треба посветити известан број вежби:

Допуњавај шта треба

6 = 1 + ___, 7 = 1 + ___, 8 = 1 + ___, 9 = 1 + ___, 5 = 2 + ___,
6 = 2 + ___, 7 = 2 + ___,

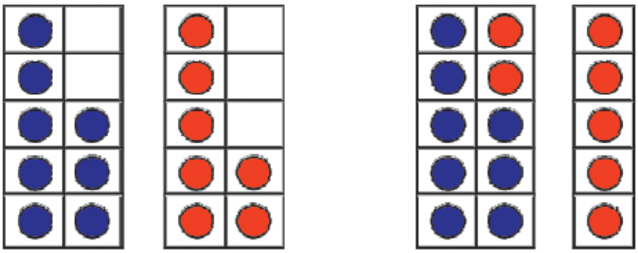
8 = 2 + ___, 9 = 2 + ___, 7 = 3 + ___, 8 = 3 + ___, 9 = 3 + ___,
6 = 4 + ___, 7 = 4 + ___,

9 = 5 + ___, 8 = 5 + ___, 7 = 5 + ___, 9 = 6 + ___, 8 = 6 + ___, 7 = 6 + ___, *итд.*

Запазимо да је разлагање на сабирке радња супротна сабирању, а уствари то је одузимање у имплицитном облику.

Узимајући један посебни пример изложићемо како тече метода сабирања:

Гледај слике и прати како рачунамо



8 + 7 = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15

Сл. 34

За разумевање али и за запамћивање појединих процедура, упутно је да се оне искажу и у *наративном облику* који не мора бити прецизно изражавање, али јесте сугестивно и сликовито. О наративним формама изражавања писао је Џ. Брунер [Br_2], па инспирисани његовим идејама можемо овде да размишљамо о наративним начинима изражавања садржаја аритметике.

Исказујући наративно поступак из претходног примера, наставник може да то уради овако: „Преслажемо црвене кружиће, па са њих 2 формирамо „десетку“ 8 + 2 и још њих 5 преостају“. Може наративно да изражава и сами рачунски поступак и да говори: „Прво додајеш 2 првом сабирку да добијеш 10, а затим додајеш преостало 5“.

Видимо да ово сабирање иде прво до 10, па се наставља додајући оно што преостаје од другог сабирка. Па због начина како се изводи, назива се *метода сабирање са прелазом преко 10*.

Пошто се уради један број примера са слагалицама и рашчлањивањем поступка на све међукораке, тада се дају вежбе са примерима без ослонца на бројевне слике за које се може претпоставити да ће се спонтано почети да формирају у уму детета у виду менталних представа. На пример:

Допуњавај шта треба

$7 + 5 = (7 + 3) + 2 = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_,\quad 9 + 7 = (9 + \_\_) + \_\_ = 10 + \_\_ = \_\_\_,$

$8 + 4 = (\_\_ + 2) + 2 = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_,$ *итд.*

На крају, дају се примери где држачи места скицирају методу, а све остало ученици сами допуњавају:

Рачунај

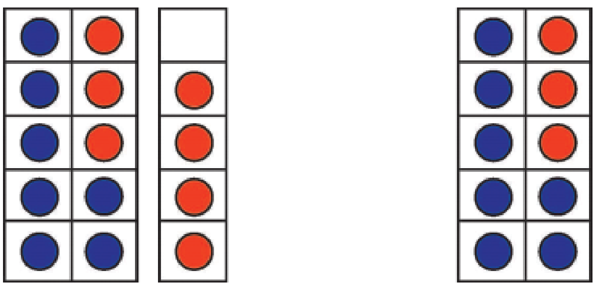
$6 + 6 = (\_\_ + \_\_) + \_\_ = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_,\quad 8 + 7 = (\_\_ + \_\_) + \_\_ = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_,$

$8 + 8 = (\_\_ + \_\_) + \_\_ = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_,$ *итд.*

Напоменимо да је ово случај где се заиста рачуна, јер сложеније сабирање сводимо на два лакша – једно са „малим“ збиром који је 10, и друго које је „лако“ сабирање са првим сабирком 10.

Слично овоме, методу одузимања прво ћемо илустровати на једном конкретном примеру.

Гледај слике и прати како се рачуна



$14 - 7 \quad = \quad (14 - 4) - 3 = 10 - 3 = 7$

Сл. 35

Пошто се овај поступак своди на одузимање до 10, а затим одузимање од 10 броја који преостаје, он се назива *метода одузимања са прелазом преко* 10. Наставник, пратећи овај поступак, изражава га наративно: „Прво се скину 4 црвена кружића да би се добила „десетка" 14 – 4, а затим се скидају преостала 3". Пратећи рачунски поступак, наставник коментарише: „Прво одузимаш 4, да добијеш 10, а затим одузимаш преостало 3".

Пошто се ова метода увежба са примерима који су илустровани, прелази се на вежбе у којима се очекује да се иконичке представе одвијају у уму детета.

Допуњавај шта треба

16 – 9 = (16 – 6) – 3 = ____ – ___ = ___, 15 – 8 = (15 – ___) – ___ = 10 – ___ = ___,

14 – 6 = (____ – 4) – 2 = ____ – ___ = ___, *итд.*

На крају долазе вежбања, где је ова метода скицирана коришћењем држача места, а све остало ученици самостално раде:

Рачунај

18 – 9 = (____ – ___) – ___ = ____ – ___ = ___, 16 – 7 = (____ – ___) – ___= ____ – ___ = ___,

14 – 7 = (____ – ___) – ___ = ____ – ___ = ___, *итд.*

Видимо да је и ово рачунање, свођење тежих случајева одузимања на једно „лако" (са разликом 10) и једно „мало" (у оквиру блока бројева до 10).

Вежбе које служе компресији међукорака код ових метода су попут следеће:

Рачунај брже

7 + 6 = 10 + 3 = ____, 7 + 5 = 10 + ___ = ____, 8 + 5 = 10 + ___ = ____,

8 + 7 = 10 + ___ = ____, 8 + 8 = 10 + ___ = ____, 9 + 8 = 10 + ___ = ____, *итд.*

17 – 8 = 10 – 1 = ___, 17 – 9 = 10 – ___ = ___, 16 – 8 = 10 – ___ = ___,

16 – 7 = 10 – ___ = ___, 15 – 8 = 10 – ___ = ___, 15 – 7 = 10 – ___ = ___, *итд.*

После ових обрада долазе и вежбе усменог рачунања, при чему су посебно важни случајеви који представљају улазе у таблице сабирања и одузимања. Тим пре, што се ове таблице не уче напамет, већ се очекује спонтано запамћивање, а и брзо рачунање у виду компресованог сабирања и одузимања са прелазом преко 10. Први примери за усмено рачунање треба да буду груписани, где први сабирак (умањеник) „мирује“, као нпр. 8 + 3, 8 + 7, 8 + 5, итд. (14 – 9, 14 – 5, 14 – 6, итд.), односно други сабирак (умањилац) „мирује“, као нпр. 6 + 5, 9 + 5, 7 + 5, итд. (13 – 6, 11 – 6, 15 – 6, итд.).

Кад би се ове методе заснивале на општим правилима, тада би за методу сабирања преко 10 то било правило здруживања сабирака. На пример то би се радило овако:

$$8 + 7 = 8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5 = 10 + 5 = 15, \text{ итд.}$$

Слично, опште правило на коме би се заснивала метода одузимања са прелазом преко 10 је правило одузимања збира од броја. На пример, то би се радило овако:

$$16 - 9 = 16 - (6 + 3) = (16 - 6) - 3 = 10 - 3 = 7, \text{ итд.}$$

Такво извођење је логички потпуно на свом месту, али је његова прихватљивост у реалној настави много мања. Али за наставника је добро да сагледава да сви поступци у аритметици имају своју основу у виду правила алгебре, али и да види да то нису само она правила која се у алгебри истичу као основна (него и многа друга која су из њих изводљива). Сва та правила требало би да садржи курс дидактике математике, *а ниједан их не садржи*, па се она неће моћи наћи ни у курсу алгебре, који тако не може непосредно послужити разумевању аритметике. Управо је тачно обратно, да ће аритметика са својим правилима и процедурама утемељеним на интуицији и изражавању путем аритметичких израза и релација, допринети значењу без кога нема правог разумевања алгебре, него би то била грана математике заснована на „скупу правила без смисла“. У том погледу, записивање израза, њихово једначење и трансформисање не доприносе само кохерентнијем излагању аритметике које прати разумевање, него ће то бити значајно знање и умење кад касније почне настава алгебре. Благовремено учење ових техника називамо *раном алгебром*, а та иновација у дидактици математике показује се да је значајна у оба случаја – за учење и аритметике и алгебре.

11.4. *Својства и везе операција сабирања и одузимања.* Све што ћемо овде излагати можемо да искажемо на следећи начин: *Кад год је једна од једнакости*

$$l + m = n,\quad m + l = n,\quad n - l = m,\quad n - m = l$$

тачна, тачне су и преостале три.

Кад проверимо да је једнакост $n - l = m$ тачна, па на основу тога, без провере, узимамо да је такође тачна једнакост $n - m = l$, тако истичемо својство одузимања које се назива *правило размене места умањиоца и разлике*. Ово правило је у случају одузимања аналогно правилу о размени места сабирака код сабирања, а у реалној настави обрађује се на посебним примерима као што је овај:

Посматрај слике и прати шта се пише

$13 - 5 = 8$	$17 - 8 = 9$
$13 - 8 = 5$	$17 - 9 = 8$

Сл. 36

Наставник скреће пажњу ученицима да умањилац и разлика у првој једнакости замењују своја места у другој. У даљим примерима, испод слагалица треба да стоје непотпуне једнакости, као што су, на пример:

15 – 7 = __	14 – 8 = __	12 – 6 = __
15 – __ = __	14 – __ = __	12 – __ = __, итд.

Затим се то правило исказује речима, а задају се вежбе попут ове:

Кад израчунаш — *без рачунања пишеш*

$16 - 7 = \_\_$ — $16 - \_\_ = \_\_$

$15 - 8 = \_\_$ — $15 - \_\_ = \_\_$, *итд.*

Веза сабирања са одузимањем истиче се писањем, испод слагалица, једне једнакости са сабирањем (одузимањем), и испод ње две друге са одузимањем (сабирањем):

Посматрај слике и прати шта се пише

$7 + 6 = 13$ — $12 - 7 = 5$

$13 - 7 = 6$ — $5 + 7 = 12$

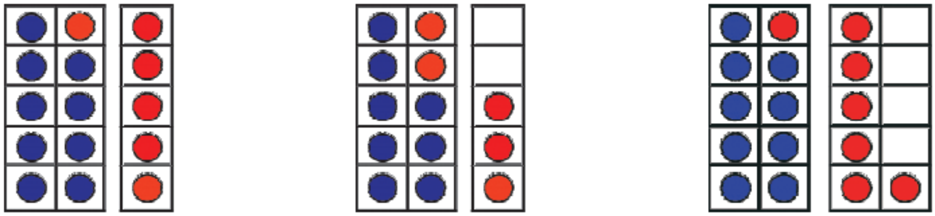
$13 - 6 = 7$ — $7 + 5 = 12$

Сл. 37

У вежбама које би следиле налазила би се једнакост која се провери (израчунавањем датог збира или разлике), а остале две се пишу без рачунања. Са повећањем степена увежбаности та вежбања иду без ослонца на бројевне слике.

Предмет вежби су и два вида одузимања у овом блоку – једно које се изводи *смањивањем умањеника* (а које је подесније кад је умањилац мањи од половине умањеника), и друго које се изводи *допуном умањиоца* (а које је подесније кад је умањилац већи од половине умањеника). Деца ће, путем вежби, осетити кад је које од ова два вида одузимања подесније, а примери треба да буду такви, да се ти видови истовремено запажају илустровани један наспрам другог. Наведимо неке од таквих примера:

Гледај слагалице и прати како се дата одузимања изводе



$15 - 6 = 10 - 1 = 9$ $\quad$ $13 - 5 = 10 - 2 = 8$ $\quad$ $16 - 7 = 10 - 1 = 9$

$15 - 9 = 1 + 5 = 6$ $\quad$ $13 - 8 = 2 + 3 = 5$ $\quad$ $16 - 9 = 1 + 6 = 7$

Сл. 38

После оваквих вежби са присуством слагалица, следиће оне без њих, али подржане држачима места помоћу којих се скицира вид одузимања, као на пример:

$17 - 9 = \_\_ + \_\_ = \_\_$, $\quad$ $17 - 8 = 10 - \_\_ = \_\_$, $\quad$ $14 - 8 = \_\_ + \_\_ = \_\_$, *итд.*

На крају долазе усмене вежбе те врсте, кад ће наставник захтевати да се одузима на оба начина, а да ученици говоре који им је од њих био лакши.

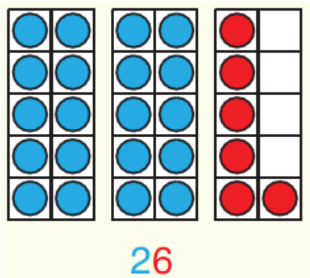
12. БЛОК БРОЈЕВА ДО 100

Сабирање је стекло свој смисао прво у оквиру блока бројева до 10, а затим и у блоку до 20, као активност која почиње уочавањем (стварањем представе о) два дисјунктна скупа, чију бројност записујемо цифарски, а бројност њихове уније записујемо као збир та два цифарска записа. Тако записи као што су 17 + 15, 20 + 10, 20 + 20 итд. стекли су одређен смисао, на пример, 17 + 15 је запис који везујемо за представу о два дисјунктна скупа (две гомилице, две слагалице) од којих један (једна) има 17, а други (друга) 15 елемената, док са 17 + 15 означавамо број елемената њихове уније (њихових унија). Но, наравно, у оквиру блока бројева до 20, за број који означавамо са 17 + 15 немамо његов цифарски запис, па одређивање бројевне вредности таквог израза (тј.

једначење таквог израза са његовим цифарским записом) је ван пакета дидактичких задатака везаних за овај блок. Зато се записи са вредношћу ван блока бројева до 20 (а то је раније био сличан случај и са блоком бројева до 10) систематски изостављају. Присетимо се да смо збирове облика 10 + 1, 10 + 2, . . . краће (цифарски) записивали као 11, 12, . . . и читали као једанаест, дванаест, . . . што је био начин како смо формирали блок бројева до 20 као проширење блока бројева до 10.

Код проширења блока бројева до 20 јавља се следећа дилема – да ли прво проширивати десетицама (30, 40, . . . , 100) или збировима облика 20 + 1, 20 + 2, . . . 20 + 10. У првом случају рачунање са десетицама је аналогно рачунању са бројевима из блока до 10, док се у другом случају проширује поступак бројања као најосновнији вид операисања са бројевима. Опредељујући се за овај други начин проширивања, као онај који је донекле природнији и директно везан за адитивну структуру блока бројева до 20, изложићемо детаље скицирајући тако дидактичке процедуре које би биле одговарајуће за извођење у реалној настави.

Збирове 20 + 1, 20 + 2, . . . , 20 + 10 означавамо краће као 21, 22, . . . , 30 и ове записе читамо двадесет један, двадесет два, . . . , тридесет. Једначењем два записа истих бројева пишемо 20 + 1 = 21, 20 + 2 = 22, . . . , 20 + 10 = 30. Представљајући слагалицама, на пример, број 26:



Сл. 39

видимо да га чине 2 десетице и 6 јединица, а што је укупно 26 јединица. Да бисмо јаче, а не само местом писања, истакли цифру која означава број десетица писаћемо је плаво, а ону која означава број јединица црвено.

На сличан начин, уз учешће ученика, наставник обрађује бројеве 31, 32, . . . , 40 а затим преостале десетице обрађује у виду питања и вежби. Читање бројева 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 мора бити правилно, јер се ти називи скраћују и тако неправилно изговарају у свакодневном говору.

Типичне вежбе уз ову врсту садржаја биле би попут ових:

(*а*) *Број* 78 *састоји се од* __ *десетица и* __ *јединица. Реци како замишљаш слагалицу којом представљамо овај број.*

(*б*) *Број* 80 *састоји се од* __ *десетица и* __ *јединица. Реци како замишљаш слагалицу којом представљамо овај број.*

Итд.

Најједноставнији случајеви сабирања у овом блоку су једначења збирова десетица и јединица са њиховим цифарским записима. Затим долази сабирање самих десетица Ту се путем слагалица илуструју десетице као декадне јединице, чије је сабирање аналогно сабирању јединица у блоку бројева до 10. Ову аналогију истичу вежбе у којима се спарују збирови десетица и одговарајући збирови бројева до 10. То би биле вежбе попут ових:

$$4 + 3 = \_\_, \ 40 + 30 = \_\_\_, \ 5 + 4 = \_\_, \ 50 + 40 = \_\_\_, \text{ итд.}$$

Док се сабирају десетице говори се, на пример, 4 десетице и 3 десетице су 7 десетица, 5 десетица и 4 десетице су 9 десетица, итд. Слично се обрађује и одузимање десетица.

У случају рачунања збирова и разлика произвољних бројева из блока до 100, ослањаћемо се на два правила, о чијој је природи потребно нешто више речи, а чему посвећујемо наш следећи одељак.

12.1. *Наративне форме.* Инспирисани идејама Џ. Брунера, изложеним у његовим књигама [Br_1] и [Br_2], ми ћемо називати *наративним правилима* оне реторичке облике који описују нека својства или процедуре на један сугестиван, али не и сасвим прецизан начин. Овде ћемо навести два наративна правила, која се односе на сабирање и одузимање двоцифрених бројева и служе да се извођење ових оперција на тај начин подстиче, нарочито у случајевима кад се оно јавља у компресираном облику.

Тако кад формулишемо правило: *сабирамо јединице са јединицама и десетице са десетицама*, ми подстичемо поступке рачунања као што је, на пример,

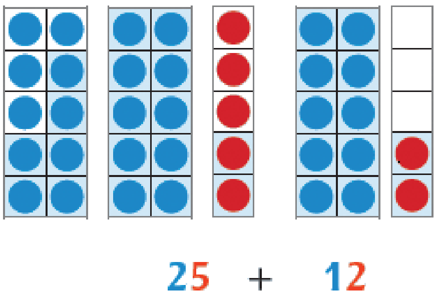
$$34 + 52 = (30 + 50) + (4 + 2) = 80 + 6 = 86,$$

Али овај поступак остаје недоречен у случајевима кад преносимо десетицу, а остају недоречени и други међукораци, чије би истицање успоравало ову процедуру и сметало њеном аутоматском извођењу. На пример, код збира 34 + 52 изостаје међукорак где се сабирци разбијају на збирове: 34 + 52 = (30 + 4) + (50 + 2), па затим долази здруживање сабирака где се назначи сабирање десетица са десетицама а јединица са јединицама, тек одакле почиње примена овог правила.

Слично сабирању, код извођења поступка одузимања у компресираном облику, руководимо се правилом: *одузимамо јединице од јединица и десетице од десетица*.

Опет нагласимо да операције сабирања и одузимања имају перманентно исто значење које се темељи на идеји о адитивној схеми и задацима сабирања или одузимања који је прате, па те операције не треба поистовећивати са техничким поступцима путем којих збирове и разлике бројева до 100 изражавамо цифарски.

12.2. *Обрада поступака сабирања и одузимања у блоку бројева до 100.* У реалној настави увек је добро почињати са илустрацијама поступака рачунања који се обрађују, јер видети значи разумети на најбољи начин. Почнимо са неким примером, рецимо одређивањем цифарског записа за збир 25 + 12:



Сл. 40

Наставник усмерава пажњу ученика на слагалице и коментарише: „Прво погледајмо слагалице где једна представља број 25 као 2 десетице и 5 јединица а друга број 12 као 1 десетицу и 2 јединице. Заједно, оне представљају збир 25 + 12. Кад групишемо „десетице“ са „десетицама“ и „јединице“ са „јединицама“, имамо 3 „десетице“ и 7 „јединица“, а то је 37 кружића“. (Наводници стоје уз термине десетице и јединице да означе слагалице кружића а не бројеве).

Интерпретирање сликом и изражавање поступка симболички писањем низа једнакости (као уз Сл. 41) води потпуном разумевању овог поступка. У реалној настави тако би се рачунали збирови, прво у случајевима кад се не преноси десетица и кроз примере који би били програмирани (са захтевом да ученик испуњава празна места означена држачима):

$$46 + 33 = (40 + 30) + (6 + 3) = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_,$$

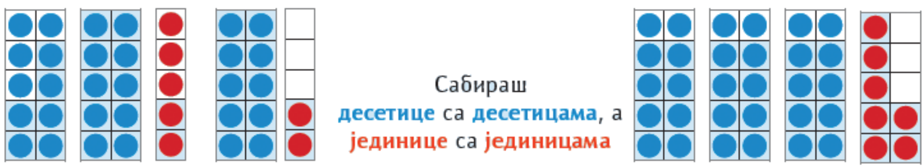
итд. до примера где се само назначавају места за испуњавање и тако састављa схема поступка, као на пример:

$$54 + 35 = (\_\_\_ + \_\_\_) + (\_\_ + \_\_) = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_, \text{ итд.}$$

Овакво рашчлањавање сигурно води већем разумевању рачунских поступака, али, познато је, да ученици лакше усвајају поступке где се међукораци компресују, па се јавља дилема да ли и у коликој мери инсистирати на потпуном разумевању. Неко могуће опредељење мора бити зависно од плана и програма, али, начелно, и од тога журимо ли и зашто, да што пре научимо ученике да добро рачунају.

Ми се о питањима зависним од спољних фактора нећемо овде бавити, него ћемо изложити један пример обраде овог поступка са сажимањем међукорака. У овом случају разумевање се веже за слике (тј. оно је у потпуности на нивоу интиуције) па обрађујући исти претходни пример имамо:

Посматрај слику.



$$25 + 12 = (20 + 10) + (5 + 2) = 30 + 7 = 37$$

Сл. 41

Коментар наставника може да иде овако: „Видимо две слагалице, једна представља број 25 као 2 десетице и 5 јединица а друга број 12 као 1 десетицу и 2 јединице, док заједно оне представљају збир 25 + 12. Групишемо „десетице“ са „десетицама“ па их имамо 3 и „јединице“ са „јединицама“ па их имамо 7. Нова слагалица представља број 37. Гледа се једнакост

$$25 + 12 = 37$$

па се каже: „5 јединица и 2 јединице су 7 јединица (пишемо 7), 2 десетице и 1 десетица су 3 десетице (пишемо 3)“.

Прве вежбе могу бити са цифрама у боји:

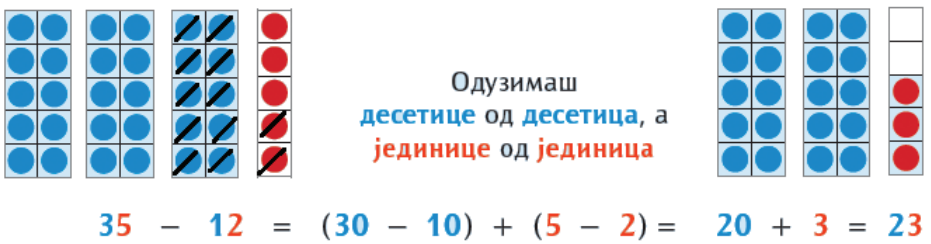
$$22 + 47 = \_\_\ \_\_,\ 43 + 45 = \_\_\ \_\_, \text{ итд.}$$

а затим се даје одређен број вежби типа:

$$61 + 28 = \_\_\_,\ 56 + 33 = \_\_\_, \text{ итд.}$$

Код одузимања, прво се увежба најједноставнији случај , а то је одузимање десетица: 7 – 4 = 3, 70 – 40 = 30, итд. да би се прешло на поступак одузимања без позајмљивања десетице. Обрада је слична случају сабирања:

Посматрај слику.



Сл. 42

Наставник коментарише: „Видимо да од слагалице коју чине 3 „десетице“ и 5 „јединица“ треба да се одузме слагалица коју чине 1 „десетица“ и 2 „јединице“. Уклањамо 2 „јединице“ од 5 „јединица“, па остају 3 „јединице“, а затим од 3 „десетице“ 1 „десетицу“, па остају 2 „десетице“, а то су 23 кружића“.

Кад овај поступак одузимања записујемо симболички са свим међукорацима, он би био представљен овако:

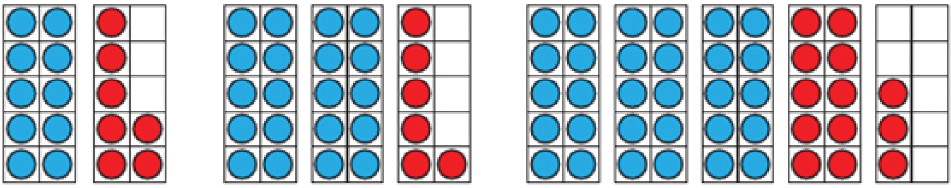
$$35 - 12 = (30 + 5) - (10 + 2) = (30 - 10) + (5 - 2) = 20 + 3 = 23,$$

где би се примењивало правило одузимања *збира од збира*, а што не би било врло прихватљиво да ученике оптерећујемо једним таквим правилом.

Кад се сабирају два двоцифрена броја чији је збир јединица 10 или више, а то изражавамо симболички, два пута ћемо применити наративно правило – сабирамо јединице са јединицама а десетице са десетицама. На пример, један такав збир овако рачунамо:

$$17 + 26 = (10 + 20) + (7 + 6) = 30 + 13 = (30 + 10) + 3 = 40 + 3 = 43.$$

Овакав поступак није најбоља основа да га компресујемо, па је његово илустровање коришћењем слагалица бољи пут обраде. Посматрајмо преслагање које слагалице у следећем примеру илуструју:



$17 + 26 \quad = \quad (10 + 20 + 10) + 3 = 43$

Сл. 43

Коментар наставника вербално уобличава овај поступак: „Прве две слагалице представљају збир 17 + 26, па кад „јединице“ скупимо заједно добијамо 1 црвену „десетицу“ и 3 „јединице“. Укупно „десетица“ ће бити 1 + 2 + 1, а то су 4 „десетице“ и још имамо 3 „јединице“, па је 17 + 26 = 43“.

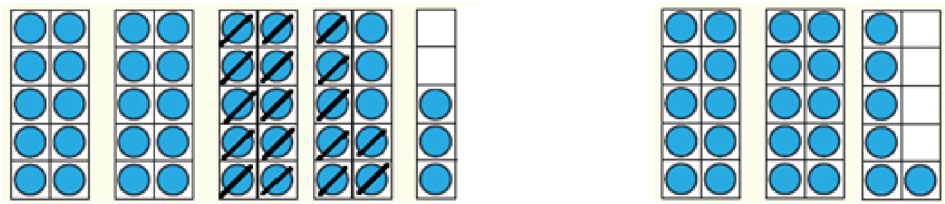
Један број вежби сабирања са хоризонталним записивањем збирова треба урадити:

$$24 + 48 = \_\_\_, \ 24 + 46 = \_\_\_, \ 58 + 33 = \_\_\_, \text{ итд.}$$

а брзом рачунању са компресијом међукорака посветићемо параграф 12.3.

Одузимање са позајмљивањем десетице интерпретира се слагалицама на следећи начин:

30 – 10 13 – 7



43 – 17 = 20 + 6 = 26

Сл. 44

Пратећи коментар би био: „Видимо да је умањеник представљен са 4 „десетице“ и 3 „јединице“, док умањилац представљају 1 „десетица“ и 7 „јединица“ (прецртани кружићи). Како не можемо да одузмемо 7 од 3, позајмљујемо 1 „десетицу“ од умањеника тј. видимо је као 10 „јединица“, па од 13 „јединица“ одузимамо њих 7: 13 – 7 = 6. У умањенику остаје 1 „десетица“ мање, па се од преосталих 3 одузима 1 „десетица“ умањиоца. Записујући овај поступак, имамо:

$$43 - 17 = (30 - 10) + (13 - 7) = 20 + 6 = 26.$$

Један број програмираних вежби, као што су:

52 – 38 = (40 – 30) + (12 – 8) = ____ + __ = ____,

64 – 47 = (50 – ____) + (14 – __) = ____ + __ = ____,

81 – 55 = (____ – ____) + (____ – __) = ____ + __ = ____, итд.

служи потпунијем усвајању ове методе.

Напоменимо да вербално уобличавање оваквих поступака рачунања не треба схватити као наметање њиховог начина извођења, јер је то опис онога што се види као једна активност, а то је реторичко изражавање које иде паралелно са симболичким. Оно је такође основа која, упрошћавањем, прелази у унутрашњи говор који прати аутоматско извођење операција, а о чему говоримо у наредном параграфу.

12.3. *Унутрашњи говор и аутоматско извођење рачунских операција.* Према Л. Виготском, егоцентрични говор детета не нестаје него се трансформише у *унутрашњи говор*. Тако се назива то нечујно везивање мисли и речи које тече у нама, у виду упрошћене верзије реалног говора у којој се често изостављају субјекти, „огољују" предикати, и такве крајње поједностављене форме говора везују за ситуације о којима се говори. (Видети књигу [Vy]).

Налазимо да и у математици, а овде посебно у аритметици, аутоматско извођење рачунских поступака такође прати унутрашњи говор на чији развој треба утицати у токовима наставе. Права места за то, у оквиру овог блока бројева, су вертикално сабирање и одузимање, а што су традиционални термини за поступке сабирања и одузимања двоцифрених бројева кад сабирке, односно умањеник и умањилац, пишемо један испод другог са цифрама јединицама у једној, а цифрама десетицама у другој колони. Узећемо један пример сабирања и један одузимања и пратити упрошћавање говора којим описујемо ове поступке, све до његових елиптичних форми, које служе за подстицање ових поступака.

Узмимо, на пример:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ \underline{+28} \\ 65 \end{array}$$

кад наставник коментарише: „Сабирамо 8 јединица и 7 јединица, па је то 15 јединица, односно 5 јединица (пишемо 5 у колони јединица) и 1 десетица (коју преносимо у колону десетица). Сабирамо десетице – 2 десетице плус 3 десетице и плус 1 десетица коју смо пренели су 6 десетица (пишемо 6 у колони десетица)". Спонтано упрошћавајући, од примера до примера, описе овог поступка сабирања долази се до његове крајње елиптичне форме: 8 и 7 су 15, пишемо 5, а 1 преносимо, 2 и 3 и 1 су 6, пишемо 6. Ову форму ученици исказују гласно или у себи док брзо рачунају, а у писаним материјалима овакав текст треба да буде уоквирен и атачиран уз пример на који се односи. Сврставајући га тако у категорију унутрашњег говора, не бринемо кад испадне недоречено то на шта се односи или кад такав текст испадне граматички неправилан.

Случај одузимања пратићемо такође узимајући један пример:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 81 \\ \underline{-47} \\ 34 \end{array}$$

кад наставник коментарише: „Одузимамо јединице од јединица – 7 од 1 не можемо да одузмемо, па позајмљујемо 1 десетицу умањеника да бисмо имали 11 јединица. Одузимамо 7 од 11 па добијамо 4 (и пишемо 4 у колони јединица). Од 7 десетица (1 десетица је позајмљена) одузимамо 4 десетице, па су то 3 десетице (пишемо 3 у колони десетица).“ Поступним упрошћавањем овакво вербално изражавање овог поступка води његовом елиптичном изражавању: 7 од 1 не може, 7 од 11 је 4, 4 од 7 (1 је одузет) је 3.

Већ смо скренули пажњу читаоцу да не поистовећује операције сабирања и одузимања са поступцима путем којих збир или разлику два двоцифрена броја изражавамо у виду децималног записа (тј. цифарски). Ми сматрамо да ове поступке треба учити у оквиру овог блока бројева, јер ће касније сабирање и одузимање троцифрених и вишецифрених бројева бити разумљивије.

На крају истакнимо до сад изграђену структуру блока бројева до 100. То је пре свега скуп N_{100} првих 100 природних бројева заједно са нулом који сви имају свој цифарски запис и који се пореде по величини (путем релације „<“) и међусобно везују, три по три, операцијама сабирања („+“) и одузимања („-“). Кад представљамо ту ситуацију симболички, пишемо

$$\{N_{100}, +, -, <\}.$$

Но, ову структуру даље обогаћујемо уводећи операције множења и дељења, а што ћемо третирати у нашем наредном параграфу.

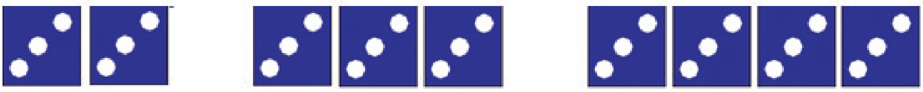
12.4. *Множење у блоку бројева до 100.* Често се каже да је множење поновљено сабирање, тј. онај случај сабирања кад су сви сабирци међусобно једнаки бројеви. У томе нема ничег погрешног, али би такав приступ обради операције множења био формалан, без визуелних представа о ситуацијама у којима реагујемо изводећи операцију множења (а уз то, неподесно је оперисати са збировима који имају већи број сабирака). Истина, као предигра множењу обично се дају вежбе рачунања збирова, као на пример: 8 + 8 + 8, 5 + 5 + 5 +5, итд. Сличне су и вежбе бројања по 2, по 3, по 4, итд. Код таквог бројања, рецимо по 5, усменим путем се ређају бројеви 5, 10, 15, . . . где се сваки следећи добија из претходног додавањем броја 5, а у ствари, тако се ређају производи 1·5, 2·5, 3·5, . ., па се тако имплицитно везује множење за сабирање. У ствари, тиме се вежбају поступци рачунања производа преко збирова у блоку бројева до 100, али тиме операцији множења не дајемо оно фундаментално значење, које ће се преносити даље при ширењу бројевних блокова.

Када обрађујемо множење, у реалној настави почињемо са издвајањем визуелних представа за које везујемо записе у виду производа два броја. На пример,

– на 1 руци је 5 прстију, на две руке су 2·5 прстију (а запис 2·5 читамо: два пута пет),
– на 1 аутомобилу су 4 точка, на 3 аутомобила су 3·4 точка,
– на 1 домини су 4 тачкице, на 5 таквих домина је 5·4 тачкица, итд.

Наравно, ситуације наведене у таквим примерима морају бити илустроване, а ученици уведени у вежбе кад сами пишу, уз дате слике, одговарајуће производе. Таква би била следећа вежба:

Гледај слике и пиши шта треба



__·__ __·__ __·__

Читај записе које си написао/написала.

Сл. 45

Овај поступак придруживања сликама записа у виду производа треба за неко време одвојити од питања „*а колико је то*“, јер се у почетку акценат ставља на препознавање схема на које реагујемо множећи. Примери који се тако обрађују дају смисао том типу схема, а који ћемо касније одредити на прецизан начин (што ће бити део излагања намењеног наставнику, ради прецизнијег разумевања ове дидактичке процедуре). У традиционалној настави те схеме су описиване као представе где „на m места имамо по n елемената“ и кад укупан број елемената означавамо као $m \cdot n$. Користећи језик теорије скупова, таква схема се може описати као фамилија коју чини m дисјунктних скупова, од којих сваки има по n елемената, а која се зове *мултипликативна схема*.

У почетку је потребно водити рачуна о редоследу писања чинилаца m и n у производу $m \cdot n$, будући да они имају различито значење – први означава број скупова (места), а други број њихових елемената (тј. број елемената на тим местима).

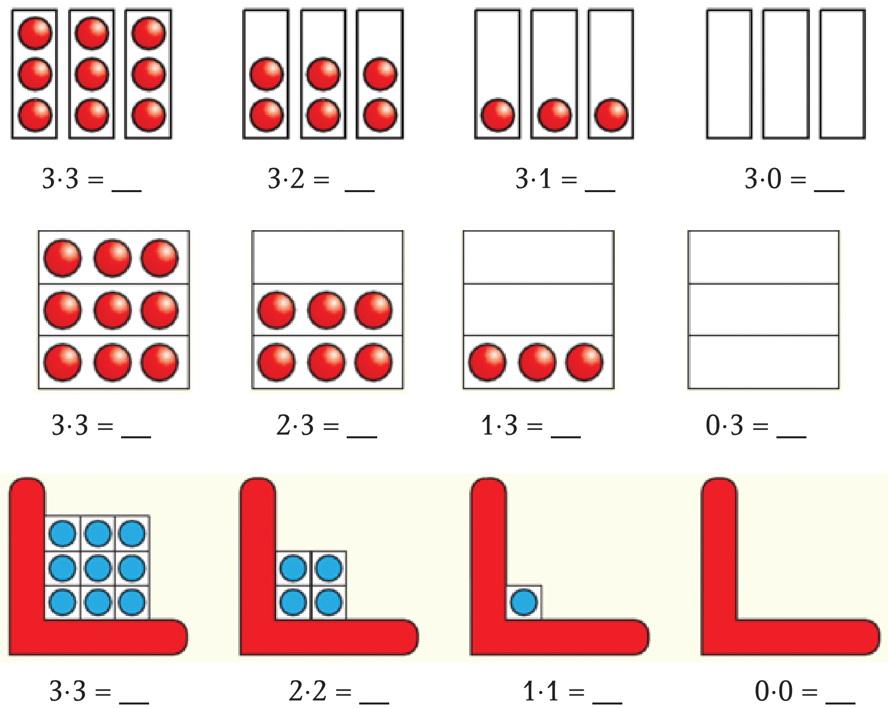
Ученицима се саопшти да се записи као што су 3·4, 2·6, 4·5, итд. називају *производи*, а бројеви који у њима фигуришу *чиниоци*, тачније први писани број назива се *први чинилац*, а други писани број *други чинилац*.

У овом почетном периоду, ученици кад рачунају вредност производа који су придружени одређеним схемама, пишу и одговарајуће збирове и једначе различите записе за исте бројеве. На пример, уз схеме илустроване на Сл. 45, једначили би производе и збирове на следећи начин: $2 \cdot 3 = 3 + 3$, $3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3$, $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$ и рачунали вредност производа рачунајући вредност ових збирова.

Посебне лекције треба наменити производима у којима се као чиниоци јављају 0 и 1. И једна и друга врста таквих производа најприродније се осмишљава у серијама примера у којима се смањује број места, односно на истом броју места смањује се број елемената. Наравно, све то иде са одговарајућим илустрацијама. Примери за ту сврху се бирају да буду једноставни и да се број елемената „брзо види“, односно може да се брзо одреди бројањем.

Уз помоћ наставника, ученици раде вежбе попут следеће:

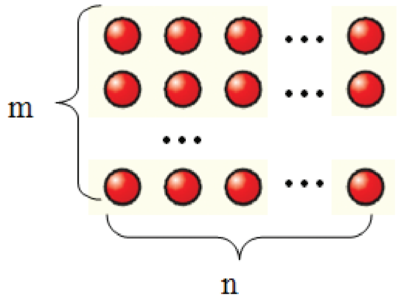
Гледај слике и пиши шта треба



Сл. 46

Празни рамови на Сл. 46 представљају празан скуп. На пример кад се посматрају кутије са кликерима, празна кутија представља празан скуп. На овај начин празан скуп стиче значење (а кад се каже да је празан скуп „апсолутно ништа“, ништа ни немамо од тог значења). Наставник може „оживљавати“ одговарајуће представе и говорити, на пример, у 3 кутије по 3 кликера, у 3 кутије по 2 кликера, у 3 кутије по 1 кликер, док је кад се каже у 3 кутије по 0 кликера мало усиљено изражавање. Поготову је 0·3 незгодан израз за неку реалну интерпретацију (а може се рећи да нигде нису стављена 3 кликера, али је и то претерано форсирање значења, које је непотребно). Зато су слике које прате низове оваквих производа најбољи носиоци значења.

Изузетно правилне схеме везане за множење су оне које имају облик правоугаоних слагалица и где се у *m* редова налази *n* објеката (најчешће кружића). Таква схема би била:

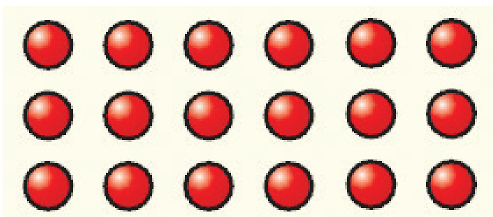


Сл. 47

а њу можемо и симетрично видети као *n* колона у којима се налази по *m* објеката (кружића).

Користећи конкретније примере оваквих схема, ученици раде вежбе попут следеће:

Гледај слику



Сл. 48

Редова је 3, *у сваком реду по* 6 *кружића. Кружића је* __·__, (пишу 3·6).

Колона је 6, *у свакој колони по* 3 *кружића. Кружића је* __·__. (пишу 6·3).

Једначећи два различита записа за број кружића, пишеш 3·6 = 6·3.

Називајући број који производ представља његовом *вредношћу*, из једног броја примера, попут горњег, индукује се правило: *Заменом места чиниоца вредност производа се не мења.*

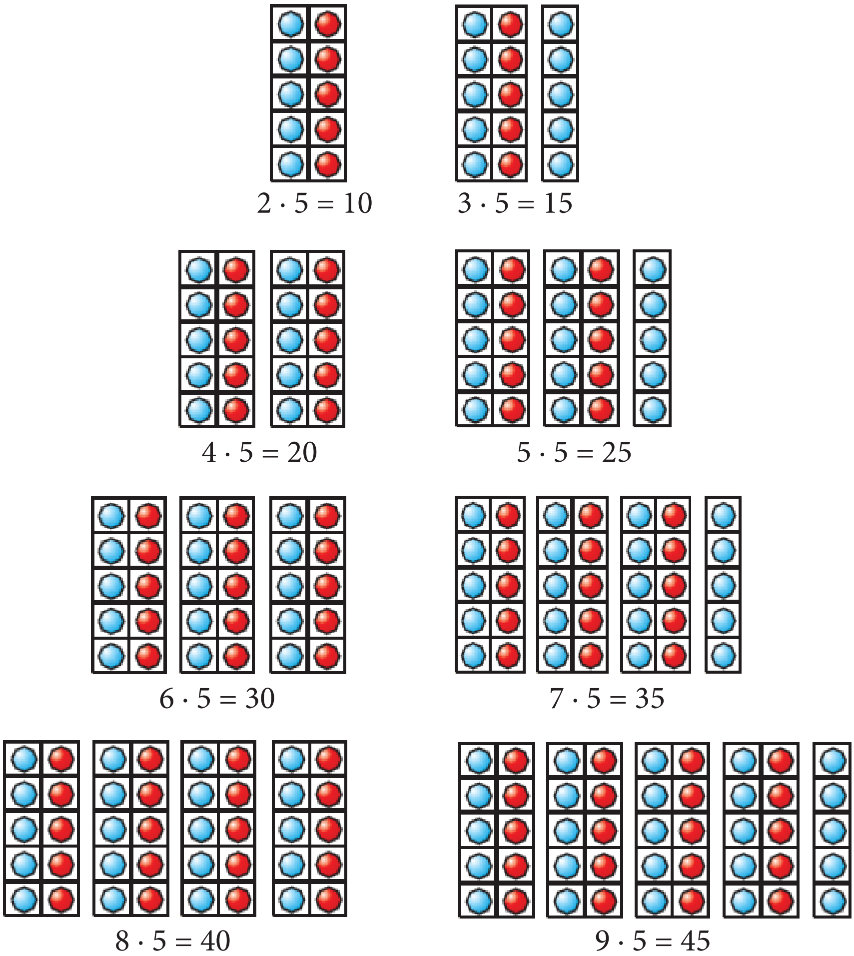
Главни дидактички задатак у оквиру блока бројева до 100 је састављање таблице множења (и тиме таблице дељења). У ту таблицу не укључују се производи са 1, јер је $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$, али ни са 10, јер се јасно види и лако памти да је 2·10 = 20, 3·10 = 30, ... , 10·10 = 100 и наравно 10·2 = 20, 10·3 = 30, . . . , 10·9 = 90. Претварајући производе у одговарајуће збирове, прво се саставља мала таблица множења

·	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

која се доста брзо и спонтано памти (а кад треба, сви улази у ту таблицу се лако усмено рачунају).

Запажа се да деца лако и брзо памте производе у којима је један чинилац број 5. Покажимо како се на тим производима гради таблица множења, јер ми сматрамо да не треба насилно инсистирати на запамћивању ове таблице него на рачунању, разбијајући сложеније производе на два лакша – једног са 5 као чиниоцем и другог са једним чиниоцем мањим од 4. Кад се овај поступак рачунања увежба и кад ученик не зна напамет неки производ, рецимо 7·8, наставник га упућује на рачунање са стране (негде на рубу свеске) збира 7·5 + 7·3. Ово што смо овде скицирали, разрадићемо у виду једног броја лекција, ослоњених на иконичке представе у виду слагалица којима представљамо бројеве.

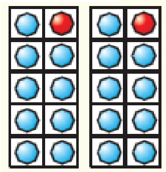
12.4.1. *Производи кад је 5 један чинилац.* Поређаћемо бројевне слике, испод којих ће стајати једнакости које нам говоре како те слике видимо на два начина, са једне стране као одређен број „петорки", а са друге као слагалицу којом представљамо тај број.



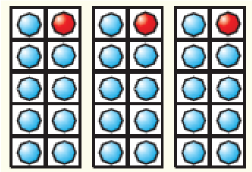
Сл. 49

Уз сваку слагалицу пребројавају се „петорке“, а затим се читају производи и то се прво ради у колони где је први чинилац паран, па затим у колони где је непаран. Увеличане слике ових слагалица требало би да стоје као постер на зиду учионице 2. разреда.

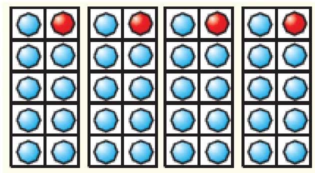
12.4.2. *Производи кад је један чинилац* 9. Ослоњени на лаке производе кад је један чинилац 10, лако се рачунају и лако памте производи кад је један чинилац 9.



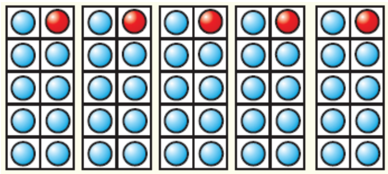
$2 \cdot 9 = 2 \cdot 10 - 2$
$2 \cdot 9 = 20 - 2 = 18$



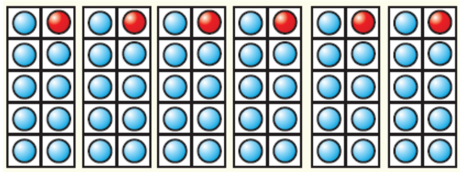
$3 \cdot 9 = 3 \cdot 10 - 3$
$3 \cdot 9 = 30 - 3 = 27$



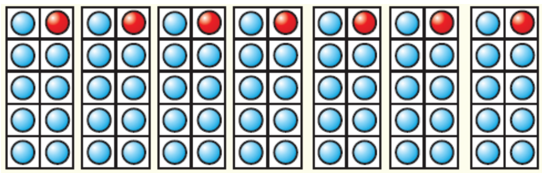
$4 \cdot 9 = 4 \cdot 10 - 4$
$4 \cdot 9 = 40 - 4 = 36$



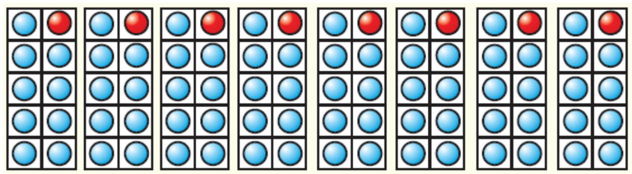
$5 \cdot 9 = 5 \cdot 10 - 5$
$5 \cdot 9 = 50 - 5 = 45$



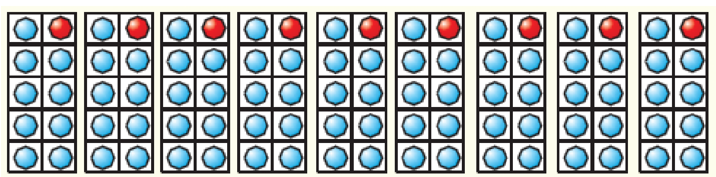
$6 \cdot 9 = 6 \cdot 10 - 6$
$6 \cdot 9 = 60 - 6 = 54$



$7 \cdot 9 = 7 \cdot 10 - 7$
$7 \cdot 9 = 70 - 7 = 63$



$8 \cdot 9 = 8 \cdot 10 - 8$
$8 \cdot 9 = 80 - 8 = 72$

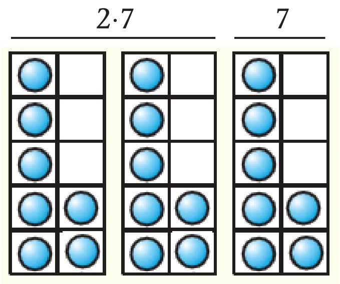


$9 \cdot 9 = 9 \cdot 10 - 9$
$9 \cdot 9 = 90 - 9 = 81$

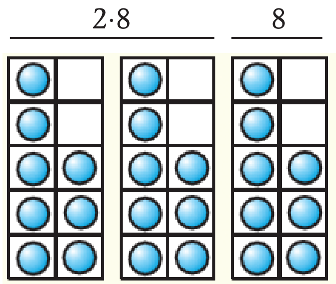
Сл. 50

Наставник подстиче праћење свих корака, па, рецимо, у случају производа $4\cdot 9$ говори: „Допуњавамо „деветице“ са по 1 црвеним кружићем да добијемо 4 „десетице“. Свих кружића је $4\cdot 10 = 40$, а плавих је $40 - 4$, а то је 36, итд. Као усмене вежбе, рачуна се скраћено: $3\cdot 9$ је 30 минус 3, $4\cdot 9$ је 40 минус 4, $6\cdot 9$ је 60 минус 6, итд. И ове увеличане илустрације треба да буду постер на зиду учионице 2. разреда.

12.4.3. *Производи са чиниоцима* 2 *и* 3. Лако се рачунају производи $2\cdot 6$, $2\cdot 7$, $2\cdot 8$ јер се своде на збир два једнака сабирка. Лако се рачунају и производи са 3 као једним чиниоцем: $3\cdot 6 = 12 + 6$, $3\cdot 7 = 14 + 7$, $3\cdot 8 = 16 + 8$, (Сл. 51). Размењујући места чиниоцима, тако се рачунају и производи $6\cdot 3$, $7\cdot 3$ и $8\cdot 3$ (а оне кад је један чинилац 9 већ смо обрадили у претходном параграфу).



$$3\cdot 7 = 2\cdot 7 + 7$$
$$= 14 + 7 = 21$$

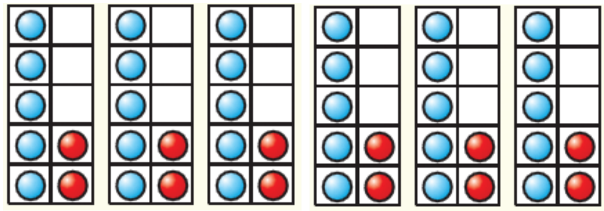


$$3\cdot 8 = 2\cdot 8 + 8$$
$$= 16 + 8 = 24$$

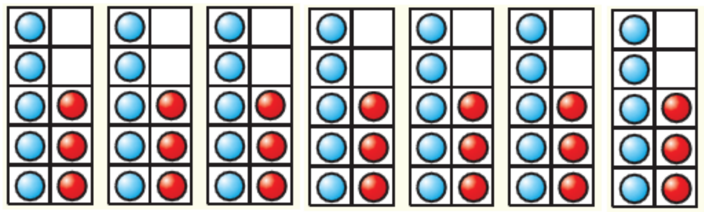
Сл. 51

Начин рачунања ових производа јасно интерпретирају слагалице на Сл. 51, али пре свега он се увежбава као вид усменог рачунања.

12.4.4. *Производи* $6\cdot 6$, $6\cdot 7$, $6\cdot 8$, $7\cdot 7$, $7\cdot 8$ *и* $8\cdot 8$. Остаје да још обрадимо производе наведене у овом наслову (а самим тим и оне који од њих настају разменом места чинилаца). Начин рачунања (у случајевима $6\cdot 7$ и $7\cdot 8$) представљамо слагалицама на следећој слици (Сл. 52) (а што ће бити исти поступак и у преосталим случајевима).



$6{\cdot}7 = 6{\cdot}5 + 6{\cdot}2$



$7{\cdot}8 = 7{\cdot}5 + 7{\cdot}3$

Сл. 52

Наставник овде истиче да се 6 „седмица“ види као 6 „петорки“ и 6 „двојки“, односно 7 „осмица“ као 7 „петорки и 7 „тројки“. А затим он ово рачунање мало шематизује:

$$6 \cdot \underset{5\;\;2}{\underset{\bigwedge}{7}} = 30 + 12 = 42 \qquad 7 \cdot \underset{5\;\;3}{\underset{\bigwedge}{8}} = 35 + 21 = 56$$

сводећи тако ова множења на два лакша – једно са чиниоцем 5, а друго са чиниоцем мањим од 4.

Изградња таблице множења је главни дидактички задатак у блоку бројева до 100 и ми смо се определили за њено постепено и спонтано запамћивање. Под тим подразумевамо да ће ученици увежбати наведене поступке рачунања и да ће их временом усмено изводити све док таблица множења не постане део фонда који улази у трајну меморију.

12.4.5. *Видови мул̄шӣликаш̄ивне схеме.* У реалној настави, ређају се разни примери намењени ученицима, који представљају мултипликативну схему. Описивали смо их као ситуације кад на m места имамо по n елемената. Овакве формулације сугеришу значење, али то значење смо прецизно исказали користећи језик теорије скупова, па смо рекли да је *мултипликативна схема* фамилија од m дисјунктних скупова, од којих сваки има по n елемената. Кад су дати бројеви m и n, а тражи се укупан број p елемената ових дисјунктних скупова, кажемо да је то *задатак множења* који прати ту мултипликативну схему (а број p зависно од бројева m и n означавамо пишући $m \cdot n$). Кад је дат број p и један од бројева m или n, а тражи се други од њих, тада кажемо да је то *задатак дељења* који прати ту мултипликативну схему. (У теорији скупова не бисмо експлицитно оперисали са природним бројевима, него бисмо говорили о коначној фамилији дисјунктних скупова, од који су они сви коначни и исте кардиналности. Ово је контекст дидактике математике где о таквим финесама не водимо рачуна).

Као једну могућу материјализацију мултипликативне схеме можемо узимати m кутија, где се у свакој од њих налази n кликера. Уз овако схваћене ове схеме јавља се извесна асиметрија у погледу значења бројева m и n, јер први се односи на број скупова (број кутија), а други на број елемената тих скупова (број кликера у тим кутијама). Правоугаоне слагалице као што је она на Сл. 47, имају више симетрије и њихове елементе можемо видети сврстане на два начина – у скупове које чини m редова слагалице, а сваки ред има по n елемената (кружића) или, пак, у скупове које чини n колона слагалице, а свака колона има по m елемената (кружића).

Кад скупове који чине мултипликативну схему поређамо у низ (A_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ и кад такође елементе сваког скупа A_i поређамо у низ (a_{ij}), $j = 1, 2, \ldots, n$ тада су елементима уније скупова A_i придружени уређени парови (i, j), i припада скупу $\{1, 2, \ldots, m\}$ а j скупу $\{1, 2, \ldots, n\}$. Скуп свих тих парова је директни производ $\{1, 2, \ldots, m\}$x$\{1, 2, \ldots, n\}$, а придруживање о ком говоримо је обострано једнозначно.

Узимајући уместо скупа $\{1, 2, \ldots, m\}$ било који скуп A чија је кардиналност број m, а уместо скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ било који скуп B чија је кардиналност n, у теорији скупова се производ $m \cdot n$ дефинише као кардинални број директног производа AxB, скупова A и B. (У теорији скупова, ова се иста дефиниција производа $m \cdot n$ узима и кад су m и n произвољни кардинални бројеви.)

Из ових разматрања видимо, да бисмо као мултипликативну схему могли да узимамо директни производ скупова (а то је и рађено у периоду *New Math*-а). Међутим, имајући у виду реалну наставу, много је природније тај појам одређивати, користећи језик теорије скупова, онако како смо то урадили на почетку овог параграфа, који је, иначе, намењен наставнику да му послужи да боље разуме све оне дидактичке поступке који служе разради операције множења на интуитивној основи.

Дакле, наставник треба да зна да поступку множења два броја претходи перцепција мултипликативних схема, затим долази схватање задатка множења, састављање производа, а тек потом одређивање његове вредности (тј. записивање тог производа у виду цифарског записа). У почетку обраде ове теме треба следити све ове кораке који су битни за учење са разумевањем. Посматрано са техничке стране, множење у блоку бројева до 100 углавном се своди на састављање таблице множења.

12.4.6. *Остала својства множења.* Почнимо са напоменом да термини „збир" и „производ" имају двојака значења – једном их треба узимати са синтактичким значењем као записе, а други пут семантички као бројеве које ти записи означавају. Број који је представљен једним производом (збиром) назива се *вредност* тог *производа (збира)*, док уобичајена фраза „нађи вредност датог поизвода (збира)" значи да тај дати запис треба заменити цифарским записом који представља тај исти број.

У једнакостима које ће изражавати својства множења користиће се заграде, а њихову функцију деца најбоље разумеју кроз активности где се оне користе. На пример, кад је један чинилац и сам производ или збир, он се пише у заградама као што то бива са примерима у следећој вежби:

Пиши бројеве који недостају да изразиш да су
(I) *дати производи помножени са* 7

а) $3 \cdot 5$ *б*) $6 \cdot 2$ *в*) $4 \cdot 3$
$7 \cdot (\_\_ \cdot \_\_)$ $\_\_ \cdot (6 \cdot 2)$ $\_\_ \cdot (\_\_ \cdot \_\_)$, итд.

(II) *дати бројеви помножени са* $3 \cdot 8$

а) 4   *б*) 3   *в*) 2
$(3 \cdot 8) \cdot \_\_$ $(\_\_ \cdot \_\_) \cdot 3$ $(\_\_ \cdot \_\_) \cdot \_\_$, итд.

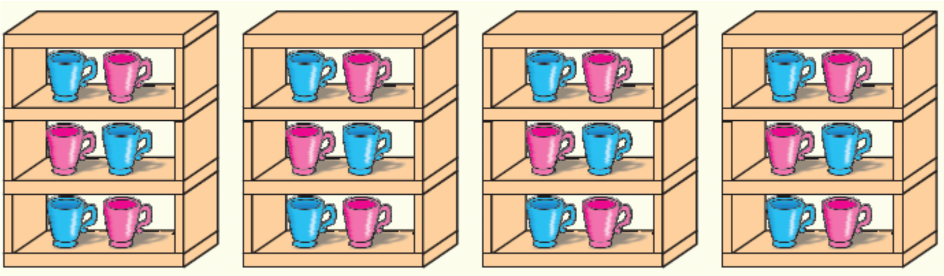
Путем примера деца такође усвајају значење заграда као команде „израчунај прво оно што је у заградама".

Израчунај

$2 \cdot (6 \cdot 5) = 2 \cdot \_\_\_ = \_\_\_$, $(6 \cdot 5) \cdot 2 = \_\_\_ \cdot 2 = 2 \cdot \_\_\_ = \_\_\_$, $6 \cdot (5 \cdot 2) = 6 \cdot \_\_\_ = \_\_\_$, итд.

12.4.6.1. *Правило здруживања чинилаца.* Напоменимо да сва правила аритметике која се издвајају на овом нивоу узимају се као интуитивно прихватљиве законитости које су саме по себи истините, па се не трудимо да ту истинитост доказујемо. Кад се ради о начинима издвајања ових правила прикладних за рад у разреду, примери које бирамо су конкретнији као што је, рецимо, следећи:

Гледај слике



Сл. 53

Видиш 4 полице, свака има 3 преграде и на свакој прегради су 2 шоље. Број преграда је $\_\_\cdot\_\_$*, а број шоља* $(4\cdot3)\cdot\_\_$*. У свакој полици је* $\_\_\cdot\_\_$ *шоља. Укупно то је* $\_\_\cdot(3\cdot2)$ *шоља. Број шоља записали смо једанпут као* $(4\cdot3)\cdot2$*, а други пут као* $4\cdot(3\cdot2)$*. Та два записа представљају један те исти број (број шоља), па пишемо једнакост* $(4\cdot3)\cdot2 = 4\cdot(3\cdot2)$.

Разрађујући овај пример даље, наставник настоји да демонстрира да ће добијена једнакост важити и кад се бројеви 4, 3, и 2 замене било којом другом тројком бројева. У том смислу задаје вежбе попут ове:

Шта би писао (писала) да је било

а) 6 *полица* *б)* 7 *полица* *в)* 9 *полица*

$(\_\_\cdot3)\cdot2 = 6\cdot(\_\_\cdot\_\_)$ $(7\cdot\_\_)\cdot\_\_ = 7\cdot(\_\_\cdot\_\_)$ $(\_\_\cdot\_\_)\cdot\_\_ = \_\_\cdot(\_\_\cdot\_\_)$.

Шта би писала (писао) да су биле

а) 4 *преграде* *б)* 6 *преграда* *в)* 8 *преграда*

$(4\cdot\_\_)\cdot\_\_ = \_\_\cdot(4\cdot2)$ $(\_\_\cdot6)\cdot\_\_ = \_\_\cdot(6\cdot\_\_)$ $(\_\_\cdot\_\_)\cdot\_\_ = \_\_\cdot(\_\_\cdot\_\_)$

а) 3 *шоље* *б*) 4 *шоље* *в*) 7 *шоља*

(__·3)·3 = __·(3·3) (__·__)·4 = __·(__·4) (__·__)·__ = __·(__·__).

Шта би писала (писао) да су биле 3 *полице, свака са* 6 *преграда и* 4 *шоље на свакој прегради*

(__·__)·__ = __·(__·__).

Путем оваквих вежби деца ће бити припремљена да прихвате *правило здруживања чиниоца: Здружујући чиниоце на било који од два начина, вредност производа се не мења.*

12.4.6.2. *Инваријантна форма правила аритметике.* У претходном одељку успоставили смо једнакост (4·3)·2 = 4·(3·2), и уз додатне вежбе видели да она важи и кад се тројка 4, 3, 2 замени било којом другом тројком бројева. За такву аритметичку једнакост кажемо да има *инваријантну форму*. Једнакости као што су 7 + 9 = 9 + 7, 7 + (5 + 4) = (7 + 5) + 4, 8·6 = 6·8 такође имају инваријантну форму, а читаоцу је то јасно и из начина како смо те једнакости индуковали, јер у том индуковању све остаје исто кад се парови, односно тројке бројева које у њима фигуришу замене било којим другим. Једнакости, као, на пример, 6 + 10 = 9 + 7, 7 + 9 = 12 + 4, су тачне, али немају инваријантну форму, јер замењујући у њима само један број неким другим, таква једнакост престаје да буде тачна.

На пример једнакост 10 – 9 = (10 – 5) – (9 – 5) је тачна и има инваријантну форму. Кад се користе слова да означе било коју другу тројку бројева добија се тачна једнакост коју изводимо овако:

У кутији је k кликера, од којих је m у боји, а међу њима n црвених. Безбојних је кликера $\underline{k - m}$. Уклањајући црвене кликере, остаје их $k - n$, а оних у боји $m - n$. Безбојних је $\underline{(k - n) - (m - n)}$. Једначећи два записа за број безбојних кликера, добијамо једнакост

$$k - m = (k - n) - (m - n).$$

12.4.6.3. *Процедурално, реторичко и симболичко изражавање правила аритматике.* Начин изражавања правила аритметике, кад се користе посебни бројеви и једнакости пишу у инваријантном облику, називамо *процедурално изражавање*. Напоменимо да је у времену пре креирања симболичке алгебре начин решавања једначина приказиван на једном конкретном примеру једначине, па се очекивало да ће се тако поступати и у свим другим случајевима. То су историјски примери изражавања одређених процедура путем конкретних случајева, па отуда за такво изражавање користимо придевску одредницу „процедуралан“.

Кад правило изражавамо речима, за тај начин изражавања кажемо да је *реторички*, што је историјски везано за реторичку алгебру, која је претходила симболичкој. А кад пишемо једнакости где произвољне бројеве означавамо словима, тада тај начин изражавања називамо *симболички*.

Да бисмо формирали правило здруживања чинилаца можемо да користимо модел кога чине k пакета од по m кутија, а у свакој кутији је по n кликера. Тада је број кутија $k \cdot m$, а број кликера $(k \cdot m) \cdot n$. С друге стране број кликера у сваком пакету је $m \cdot n$, па у k пакета то је $k \cdot (m \cdot n)$ кликера. Једначећи два записа за број кликера добијамо $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$. Овај модел са пакетима кутија у којима су кликери представља *мултипликативну схему за троструки производ*, коју описујемо апстрактно као k *фамилија од по* m *скупова од којих сваки има* n *елемената*.

Свакако да и начин примене правила треба појаснити деци (за коју то не мора бити јасно као што је за нас одрасле). Најбољи начин да то урадимо је кроз вежбе које ћемо им наменити, као што је ова:

Мисли на

(1) *правило размене места чинилаца*
(2) *правило здруживања чинилаца.*

Кад примењујеш правило (1)

на	*добијаш*	*и можеш да пишеш*
3·8	8·3	3·8 = 8·3
7·5	__·__	__·__ = 5·7
4·(2·5)	__·(5·2)	4·(2·5) = __·(__·__)
(3·8)·4	(__·__)·4	3·(8·4) = __·(__·__), итд.

Кад примењујш правило (2)

на	*добијаш*	*и можеш да пишеш*
(3·5)·4	3·(5·4)	(3·5)·4 = __·(__·__)
8·(5·4)	(8·5)·4	8·(5·4) = (__·__)·__, итд.

Пиши у ( ) 1 или 2 да назначиш које је правило примењивано

$$\begin{array}{cccc} (\ ) & (\ ) & (\ ) & (\ ) \\ 4\cdot6 = 6\cdot4, & 3\cdot(7\cdot2) = (3\cdot7)\cdot2, & 3\cdot(7\cdot2) = 3\cdot(2\cdot7), & (5\cdot6)\cdot7 = (6\cdot5)\cdot7, \text{ итд.} \end{array}$$

Пример који следи има посебно важну улогу.

Мисли на
(1) *правило размене места чинилаца*
(2) *правило здруживања чинилаца*
и пиши 1 или 2 да назначиш које је правило примењивано.

$$3\cdot(4\cdot5) \overset{(\ )}{=} 3\cdot(5\cdot4) \overset{(\ )}{=} (3\cdot5)\cdot4 \overset{(\ )}{=} (5\cdot3)\cdot4 \overset{(\ )}{=} 5\cdot(3\cdot4) \overset{(\ )}{=} 5\cdot(4\cdot3) \overset{(\ )}{=} (5\cdot4)\cdot3 \overset{(\ )}{=} (4\cdot5)\cdot3$$

$$\overset{(\ )}{=} 4\cdot(5\cdot3) \overset{(\ )}{=} 4\cdot(3\cdot5) \overset{(\ )}{=} (4\cdot3)\cdot5 \overset{(\ )}{=} (3\cdot4)\cdot5.$$

Видиш да се чиниоци троструког производа могу здруживати на оба начина и произвољним редоследом.

Вероватно да ће наставник „уз помоћ својих ученика“ поређати све те редоследе:

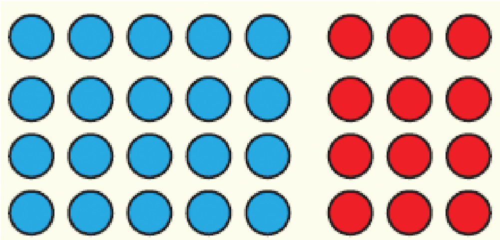
345, 354, 435, 453, 534, 543

и уочити одговарајуће парове једнакости $(3\cdot4)\cdot5 = 3\cdot(5\cdot4)$, $(3\cdot5)\cdot4 = (5\cdot3)\cdot4$ итд.

У овом случају могло би се рећи да ми овим путем изводимо опште правило здруживања чинилаца на основу наведена два правила под (1) и (2). Ипак ово није формално извођење, него једна вођена примена тих правила и сагледавање оног што је тим путем добијено. Уосталом, за децу овог узраста дедуктивно закључивање и није карактеристично.

12.4.6.4. *Правила множења збира и разлике.* Овде ћемо, као подесне, користити правоугаоне слагалице. На пример, деца раде следећу вежбу:

Гледај слагалицу



Сл. 54

У сваком реду је 5 *плавих и* 3 *црвена кружића. У* 4 *реда је* $4{\cdot}(5+3)$ *кружића. У 4 реда је* $4{\cdot}5$ *плавих и* $4{\cdot}3$ *црвених кружића. Укупно то је* $4{\cdot}5 + 4{\cdot}3$ *кружића. Једначећи два записа за укупни број кружића, добијамо*

$$4{\cdot}(5+3) = 4{\cdot}5 + 4{\cdot}3.$$

Варирајући број плавих и црвених кружића као и број редова, наставник припрема своје ученике да прихвате ово правило и кад се тројка 4, 5, 3 замени било којом другом тројком бројева (из блока N_{100}). (Видети разраду примера из одељка 12. 4. 6. 1). *Правило множења збира* изражавамо речима овако: *Множећи збир неким бројем, множимо сабирке тим бројем па те производе сабирамо.*

Користећи исту слагалицу (Сл. 54) број плавих кружића пишемо на два начина као $\underline{4{\cdot}(8-3)}$ и $\underline{4{\cdot}8} - \underline{4{\cdot}3}$. Једначењем тих записа добија се

$$4{\cdot}(8-3) = 4{\cdot}8 - 4{\cdot}3.$$

Опет се варирањем тројке 4, 8, 3 добијају једнакости овог истог типа, а након таквих вежбања деца прихватају *правило множења разлике*: *Разлика се множи неким бројем тако што се помноже тим бројем умањеник и умањилац, па се ти производи одузму.*

На крају за успостављање правила о множењу збира користимо модел који чине k кутија где је у свакој m плавих и n црвених кликера. У кутији је $m + n$ кликера, а у k кутија то је $k{\cdot}(m + n)$ кликера. У свакој од k кутија је по m плави кликера, а то је $k{\cdot}m$ кликера и по n црвених, па је то $k{\cdot}n$ кликера. Укупно, то је $k{\cdot}m + k{\cdot}n$ кликера. Једначењем два записа за укупни број кликера добијамо

$$k{\cdot}(m+n) = k{\cdot}m + k{\cdot}n.$$

Слично, кад је у свакој од k кутија m плавих и црвених кликера од којих је n црвених. Број плавих кликера можемо писати на два начина $k{\cdot}(m-n)$ и $k{\cdot}m - k{\cdot}n$, па једначећи ове записе, добијамо

$$k{\cdot}(m-n) = k{\cdot}m{\cdot} - k{\cdot}n$$

Тако смо формирали правила множења збира и разлике у симболичкој форми.

12.5. *Коментар.* Нека од наведених правила су аксиоме поља, као што су правила размене места сабирака или чинилаца (комутативни закони за сабирање и множење) и правило множења збира (дистрибутивни закон). Напоменимо да се из комплетног списка аксиома поља могу извести сва својства сабирања и множења. У дидактици успостављамо правила аритметике као принципе који стоје независно један од другог, а важнији су они који се чешће примењују.

Кад се слова користе као ознаке за произвољне бројеве, добијено правило очигледно не зависи од посебних вредности тих слова. Али ми сматрамо да је прихватљивије за децу да се прво та правила успоставе радећи са конкретним бројевима, и да се кроз вежбе варирања види да она остају да важе кад се на одговарајући начин ти бројеви замене произвољним, другим. Тек после таквих вежби може се од деце захтевати да такве једнакости испишу користећи слова. Ми сматрамо да коришћење слова и, уопште, елементи ране алгебре представљају можда најзначајнију обнову наставе аритметике, која ће као таква постепено стицати своје место и добијати своје право обликовање. Везивање аритметике у прва четири разреда основне школе за скуп N свих природних бројева не би реално допуштао обраду ране алгебре како то ми овде сугеришемо. Нама изгледа као временски изводљив оквир шест првих разреда осмогодишње школе, па такву реформу курикулума овде такође заговарамо.

И најзад, приметимо да се једначење различитих записа за исти број заснива на Канторовом принципу инваријантности броја, а што значај тог принципа посебно истиче.

12.6. *Дељење у блоку бројева до* 100. Кад наставник обрађује таблицу множења и пита, на пример,

– којим бројем треба помножити 7 да се добије 56,
– који број кад се помножи са 7 даје 56, итд.

онда су то задаци дељења у имплицитном облику.

Кад се у настави математике рано, тј. већ од првог разреда почне да користи „x“ као ознака за непознати број и кад се „решавају“ најједноставнији облици једначина $x + a = b$, $a + x = b$, $a \cdot x = b$, $x \cdot a = b$), онда се то може користити да се решавају задаци одузимања и дељења у имплицитном облику. Уместо исказивања питања речима лакше је то радити захтевом да се „решавају“ једначине, као на пример:

Одређуј x

$5 \cdot x = 35$	$x \cdot 6 = 36$	$x \cdot 8 = 48$	$7 \cdot x = 56$
$x =$ ___	$x =$ ___	$x =$ ___	$x =$ ___, итд.

Користи таблицу множења која је штампана у твојој књизи да провериш своје одговоре.

Често се узима да је сврха једначина решавање текстуалних проблема. Но тада такве једначине треба решавати формално (тј. на ефикасан начин), а што не може бити случај са решавањем једначина у нижим разредима основне школе. У овом раном периоду сврха једначина је коришћење слова као ознаке за непознати (тражени) број. Али и то се деци саопштава на неки стварнији начин да би она усвојила ту улогу слова. На пример:

- Шака је затворена и у њој су лешници. Не знамо колико је лешника па тај број означавамо са x (слово икс). Кад се шака отвори видимо да је 6 лешника, пишемо $x = 6$ (дајући тако смисао овој једнакости).
- Кутија са оловкама је затворена, не знамо колико је у њој оловака и тај број означавамо са x. Кад се кутија отвори и оловке преброје, пишемо $x = 10$.
- Не знамо одмах који број кад се помножи са 7 даје 56, па га означавамо са x. Да је тај број помножен са 7 пишемо $7 \cdot x$ а да то износи 56 пишемо $7 \cdot x = 56$. Кад погледамо у штампаној таблици множења, видимо да је x број 8, па пишемо $x = 8$. (Са оваквим примерима и њима сличним множење са x, тј. овде израз $7 \cdot x$ стиче одређен смисао, као и једнакости као што је овде $7 \cdot x = 56$.)

Ово је само краћи осврт и нећемо улазити у детаље који би представљали разраду теме „једначине“. Израз „решавање једначина“ је претенциозно употребљавати у овом контексту, где се једначине користе да би се словом обележавао непознати број који варира од примера до примера, стичући смисао променљиве која пролази кроз одређени скуп вредности (нпр. блок бројева до 100). На овом нивоу, развијање идеје о промењљивој је много важније од решавања текстуалних задатака једначинама (а што би такође био један дидактички преурађени задатак).

Размишљајући о начину увођења дељења могли бисмо поступити формално: Број x у једначини $7 \cdot x = 56$ означавамо са 56:7 и овај запис читамо „56 подељено са 7“, итд. Међутим, ако та операција треба да стекне дубљи смисао треба је везати за примере мултипликативне схеме коју прати задатак дељења. Кад имамо фамилију од m једнакобројних скупова, од којих сваки садржи n елемената, и кад је укупан број тих елемената p, па кад су дати бројеви p и m, а тражи се број n, тај број означавамо са p:m, а овај задатак дељења називамо *квотизација (количковање)*, док кад су дати бројеви p и n, а тражи се број m, тај број означавамо пишући p:n, а овај задатак дељења називамо *партиција (раздвајање* на једнаке делове).

И код дељења у почетку се задржавамо на вежбама где се тражени бројеви само записују (а не рачунају).

Купљено је 48 *оловака у* 6 *кутија. Колико је то оловака у свакој кутији*: ____:__?
Купљено је 48 *оловака у кутијама које садрже по* 8 *оловака. Колико је то кутија:* ____ : __?
Запис 48:6 *читаш* „48 *подељено са* 6“, *а запис* 48:8 *читаш* „____________“.

Први задатак у овом примеру је количковање, док је други раздвајање.

Купљено је 56 *садница које треба посадити у* 7 *једнаких редова. Колико је то садница по реду*: ____:__?
Купљене су 72 *саднице које треба посадити по* 8 *у сваком реду. Колико је то редова*: ____:__? *Запис* 56:7 *читамо* „_______________“, *а запис* 72:8 *читамо* „______________“.

После једног броја оваквих примера, прелази се на „рачунање“, тј. деца се ослањају на знање таблице множења да записе у виду количника изједначе са њиховом вредношћу израженом цифарским записом.

Којим бројем множиш

број	*да добијеш*	*Тај број је*	*па пишеш*
6	48	__	48:6 = 8
8	48	__	48:8 = __
7	56	__	__:__ = __
8	72	__	__:__ = __, итд.

12.6.1. *Веза између множења и дељења.* Следећа вежбања служе да се искажу везе између множења и дељења.

Кад знам да је	*тада без рачунања пишем*	*или*
4·7 = 28	28:4 = 7	28:7 = 4
5·8 = 40	40:5 =___	40:8 = ___
6·9 = 54	54:6 = ___	54:9 = ___
8·9 = 72	72: ___ = ___	72: ___ = ___, итд.

12.6.2. *Веза између дељења и множења.* Вези дељења и множења намењују се вежбе попут ове:

Кад размислим колико је	*и нађем да је*	*без рачунања пишем*
36:4	9	4·9 = 36
36:9	4	9·4 =___
64:8	8	8·8 = ___
72:9	8	___·___ = ___, итд.

Ове и овакве вежбе су такође вид провере да је задатак дељења исправно урађен.

12.6.3. *Размена места дељеника и количника.* У сврху уочавања и коришћења овог својства састављају се вежбања попут овог:

Кад проверим да је	*пишем без провере*	*и*
45:9 = 5	9·5 = 45	45:5 = 9
42:7 = 6	7·6 = ___	42: ___ = ___
63:9 = 7	9·7 = ___	63:7 = ___, итд.

У овим вежбањима количник се веже за производ, а преко тог, производ за други запис количника, настао разменом места делитеља и количника у првом запису. После ових вежбања следе она где се размена места делитеља и количника врши непосредно.

Кад провериш да је	*без провере можеш да пишеш*
63:9 = 7	63:7 = ___
63:7 = 9	63:9 = ___
90:10 = 9	90:9 = ___, итд.

Напоменимо да је својство размене места делитеља и количника код дељења кореcподентно својству размене места чинилаца код множења.

12.6.4. *Општи вид везе множења и дељења.* Често се каже да је дељење операција супротна множењу. Ту везу исказујемо са више прецизности кад кажемо да чим је тачна једна од једнакости

$$m{\cdot}n = p,\ \ p{:}m = n,\ \ p = m{\cdot}n,\ \ n = p{:}m,\ \ n{\cdot}m = p,\ \ p{:}n = m,\ \ p = n{\cdot}m,\ \ m = p{:}n$$

тачне су и остале, при чему су овде укључена својства размене чинилаца и својство размене делитеља и количника, уз својство рефлексивности једнакости. Стриктније говорећи, веза две операције своди се на то да чим је тачна једна од релација

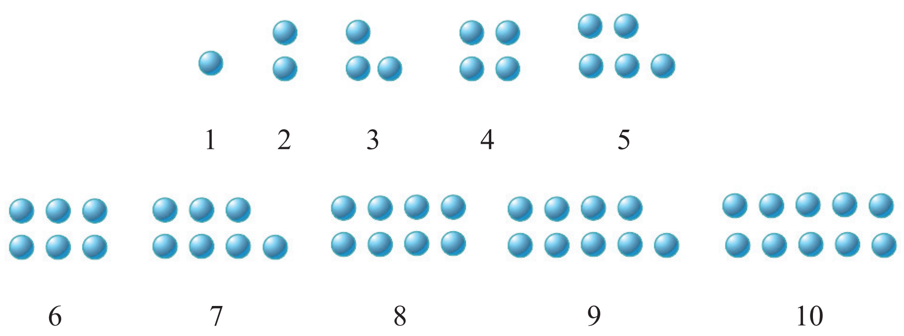
$$m{\cdot}n = p,\quad p{:}m = n$$

тачна је и она друга.

Напоменимо да операција дељења није асоцијативна јер, на пример, једнакост (9:3):3 = 9:(3:3) није тачна и сличне једнакости које би изражавале асоцијативност дељења не би биле тачне у многим другим случајевима.

12.6.5. *Дељивост са* 2, 3, 4 *и* 5. Представљаући дељивост, служићемо се бројевним сликама којима ћемо представити дељивост са 2, а затим са сваким од бројева 3, 4 и 5 понаособ.

Гледај слике



Сл. 55

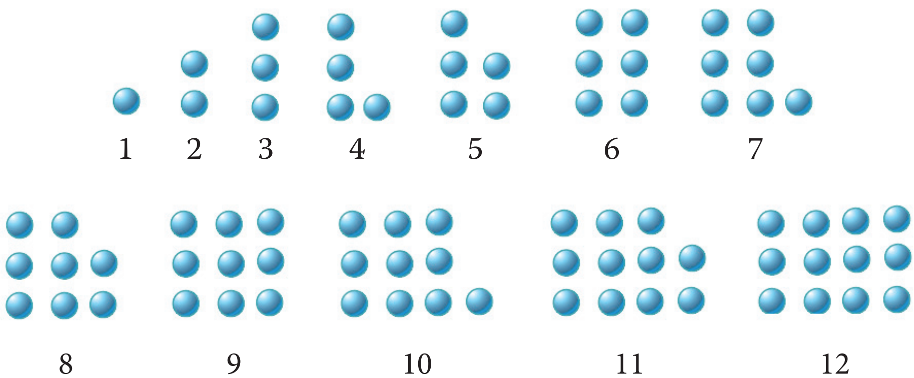
Видиш да су бројеви 2, 4, 6, 8 *и* 10 *дељиви са* 2: 2:2 =__, 4:2 = __, 6:2 = __, 8:2 = __ *и* 10:2 = __.
Можеш да пишеш те једнакости и овако: 2 = 2·1, 4 = 2·2, 6 = 2·3, 8 = 2·__, 10 = 2·__.
Бројеви 1, 3, 5, 7 *и* 9 *нису дељиви са* 2, *па можеш да пишеш једнакости:* 3 = 2·1 + 1, 5 = 2·2 + 1, 7 = 2·__ + 1, 9 = 2·__ + __.

Продужујући можеш да пишеш
11 = 2·5 + __, 12 = 2·__, 13 = 2·6 + __, 14 = 2·__, 15 = 2·__ + 1, 16 = 2·__. 17 = 2 __ + __, 18 = 2·__, 19 = 2·__+ __, 20 = 2·___.

Међу овим бројевима дељиви су са 2: ___, ___, ___, ___, ___.

Наставник подстиче ученике да запазе да су бројеви дељиви са 2 производи броја 2 и неког другог броја. Такође подсећа да се за те бројеве каже да су парни, док оне који нису дељиви са 2 називамо непарни бројеви.

Гледај слике

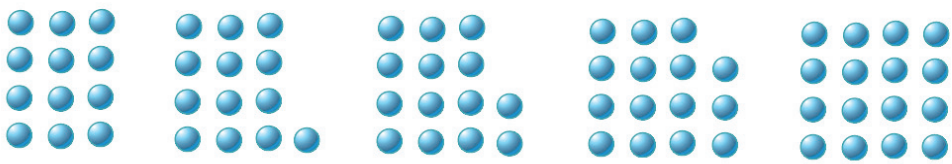


Сл. 56

Видиш да су бројеви 3, 6, 9 *и* 12 *дељиви са* 3: 3:3 = 1, 6:3 = __, 9:3 = __, 12:3 = __, *а ове једнакости можеш да пишеш и овако*: 3 = 3·1, 6 = 3·__, 9 = 3·__, 12 = 3·__.
Бројеви 1,2; 4,5; 7,8; 10, 11 *нису дељиви са* 3 *па можеш да пишеш једнакости:* 4 = 3·1 + 1, 5 = 3·1 + 2; 7 = 3·2 + __, 8 = 3·2 + __; 10 = 3·3 + __, 11 = 3·3 +__.

Пиши бројеве дељиве са 3 *од* 3 *до* 30: 3, 6, 9, ____, ____,____, ____, ____, ____,____, *па истичући дељивост са* 3 *пишеш*: 3 = 3·1, 6 = 3·2, 9 = 3·__, 12 = 3·__, 15 = 3·__, 18 = 3·__, 21 = 3·__, 24 = 3·__, 27 = 3·__, 30 = 3·____.
Запажаш да кад је број дељив са 3 *може да се напише као производ броја* 3 *и неког другог броја.*
Бројеви: 7, 8; 16, 17; 25, 26 *нису дељиви са* 3 *па пишеш једнакости*: 7 = 3·2 + 1, 8 = 3·2 +2; 16 = 3·__ +1, 17 = 3·__ + 2; 25 = 3·__ + 1, 26 = 3·__ +2.
Видимо да кад бројеви нису дељиви са 3 *без остатка, као остатак буду бројеви* 1 *или* 2.
Слично обрађујемо дељивост са 4 и 5.
Пиши бројеве који су дељиви са 4: 4, 8, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, 40, *па пишеш* 4 = 4·1, 8 = 4·2, 12 = 4·3, ______________________________ ____, 40 = 4·10.

Гледај слике



12 13 14 15 16

Сл. 57

Пишеш

12 = 4·3, 13 = 4·3 + 1, 14 = 4·__ + __, 15 = 4·__ + __, 16 = 4·__.

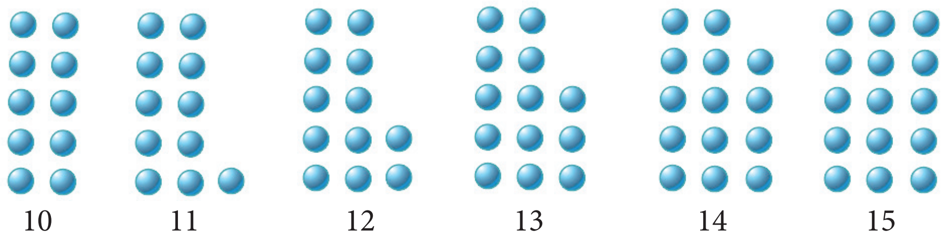
Видимо да кад бројеви нису дељиви са 4 *без остатка, остатак буде* 1, 2 *или* 3.

А уз дељивост са 5 имамо:

Пиши бројеве дељиве са 5: 5, 10, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, 50.

Пиши и једнакости: 5 = 5·1, 10 = 5·2, 15 = 5·__, 20 = 5·__, 25 = 5·__, 30 = 5·__, 35 = 5·__, 40 = 5·__ , 45 = 5·__, 50 = 5·____.

Гледај слике



Сл. 58

Пишеш

$10 = 5 \cdot 2$, $11 = 5 \cdot 2 + 1$, $12 = 5 \cdot \_\_ + 2$, $13 = 5 \cdot \_\_ + 3$, $14 = 5 \cdot 2 + 4$, $15 = 5 \cdot 3$.

Видиш да бројеви 11, 12, 13, 14 *нису дељиви са* 5 *без остатка. За* 11 *остатак је* 1, *за* 12 *је* 2, *за* 13 *је* 3 *и за* 14 *је* 4.
Наставник подстиче запажање да је број дељив са 4 одн. са 5 кад се може написати као производ броја 4, одн. 5 и неког другог броја. Такође подстиче запажање да је остатак увек мањи од броја са којим се дели.

За увежбавање овог градива и усмено извођење дељења са остатком, наставник припрема и следеће вежбе:

Једнакости

$17 = 4 \cdot 4 \cdot + 1$, $23 = 4 \cdot 5 + 3$, $32 = 5 \cdot 6 + 2$, $39 = 5 \cdot 7 + 4$, итд.

пишемо и овако

$\underline{17}:4 = 4$, $\underline{23}:4 = 5$, $\underline{32}:5 = 6$, $\underline{39}:5 = 7$, итд.
1 3 2 4

и читамо: 17 *подељено са* 4 *је* 4 *и остатак је* 1, 23 *подељено са* 4 *је* 5 *и остатак је* 3, 32 *подељено са* 5 *је* 6 *и остатак је* 2, 39 *подељено са* 5 је 7 *и остатак је* 4.

12.6.6. *Дељивост са* 6, 7, 8 *и* 9. На сличан начин као што је скицирана обрада дељивости са 4 и 5, обрађује се дељивост са 6, бројева до 60, са 7 бројева до 70, са 8 бројева до 80 и са 9 бројева до 90. И овде се запажа (а не дефинише) да је број дељив са 6 кад је производ броја 6 и неког другог броја, и тако иде и исказивање дељивости са 7, 8 и 9. Ово је типично за учење кроз активности кроз које ученик формира своје знање.

Важно је напоменути да се ова обрада дељивости не подудара са оном где се изводе правила кад је број дељив са 2, са 3 итд. Циљ ове теме је дељење са остатком, бројева до 20 са 2, бројева до 30 са 3, ..., бројева до 90 са 9. Типичне вежбе су попут ове:

Рачунај и пиши шта треба

(I) $\underline{17}:2 = \_\_\_$, (II) $\underline{26}:3 = \_\_\_$, (III) $\underline{37}:4 = \_\_\_$, (IV) $\underline{44}:5 = \_\_\_$, (V) $\underline{56}:6 = \_\_\_$

(VI) $\underline{67}:7 = \_\_\_$, (VII) $\underline{78}:8 = \_\_\_$ (VIII) $\underline{88}:9 = \_\_\_$, итд.

Кад се увежба дељење са остатком, тада те вежбе треба изводити као усмено рачунање. И као што је таблица множења обавезан усмени фонд који се претпоставља код извођења множења вишецифрених бројева једноцифреним, тако је и ово дељење са остатком обавезан усмени фонд за дељење вишецифрених бројева једноцифреним. Значај ове теме објашњава и дужину њене обраде у овом чланку.

12. 6. 7. *Даља својства везана за однос множења и дељења.* Множећи неки број другим (већим од 1) добија се још већи број. А делећи га, добија се још мањи број. Тај смисао везан за две операције множење и дељење долази до изражаја кад се каже да су оне супротне једна другој. То прецизније изражавамо једнакостима где неки број прво множимо (делимо) неким другим бројем, па затим делимо (множимо) тим истим бројем.

Из релација

$$p = m \cdot n, \quad p:m = n, \quad p:n = m$$

кад се у другој и трећој од њих p замени са $m \cdot n$ добија се

$$(m \cdot n):m = n, \quad (m \cdot n):n = m.$$

Кад се у првој од њих n замени са $p:m$, а m са $p:n$, добија се

$$p = m \cdot (p:m), \qquad p = (p:n) \cdot n$$

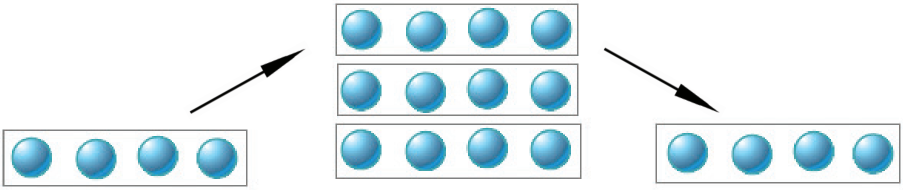
односно, друкчије писано

$$(p:m) \cdot m = p, \quad (p:n) \cdot n = p$$

а што је једна те иста једнакост.

Кад се обрађују ова својства у реалној настави, очигледност која се постиже коришћењем иконичких представа и рад са посебним бројевима су оно што долази у обзир, а не овакви формални поступци.

Гледај слику



4 $\qquad$ $3 \cdot 4$ $\qquad$ $(3 \cdot 4) : 3$

Сл. 59

Кад 4 множимо са 3 добијамо $3{\cdot}4$, *а кад* $3{\cdot}4$ *делимо са 3 добија се* $(3{\cdot}4){:}3$, *а што је* 4.

Пишемо једнакост

$$(3{\cdot}4){:}3 = 4.$$

Да смо множили

са	*писали бисмо*
4	$(4{\cdot}4){:}4 = 4$
5	$(5{\cdot}4){:}5 = \_\_$
6	$(6{\cdot}4){:}\ \_\_ = \_\_$
7	$(\_\_{\cdot}4){:}\ \_\_ = \_\_$, итд.

Да смо множили

број	*писали бисмо*
5	$(3{\cdot}5){:}3 = 5$
6	$(3{\cdot}6){:}\_\_ = \_\_$
7	$(3{\cdot}\_\_){:}\ \_\_ = \_\_$
8	$(\_\_{\cdot}\_\_){:}\_\_ = \_\_$, итд.

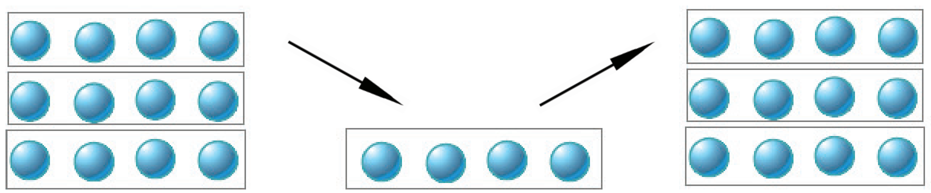
Да смо множили

са	*број*	*писали бисмо*
4	5	$(4 \cdot 5):4 = \underline{\quad}$
6	7	$(6 \cdot \underline{\quad}):\underline{\quad} = \underline{\quad}$
7	5	$(\underline{\quad} \cdot 5):\underline{\quad} = \underline{\quad}$
8	9	$(\underline{\quad} \cdot \underline{\quad}):\underline{\quad} = \underline{\quad}$ итд.
m	n	$(m \cdot n):m = \underline{\quad}$.

Деца која су научила да користе слова као ознаке за произвољне бројеве лако ће допунити једнакост у последњем реду претходне вежбе. Деца такву једнакост не изводе (као што смо то ми урадили) јер је то карактеристично за дедуктивно мишљење, него то својство индукују из низа примера записујући га у низу случајева у инваријантном облику, па га на крају словно (симболички) изражавају.

Такође, случај кад се неки број дели, па затим множи истим бројем, обрађујемо на сличан начин.

Гледај слику



12　　　　12 : 3　　　　(12 : 3) · 3

Сл. 60

Кад 12 *поделиш са* 3, *па број* 12:3 *помножиш са* 3 *добијаш* $(12:3) \cdot 3$. *Видиш да је то* 12 *и пишеш*

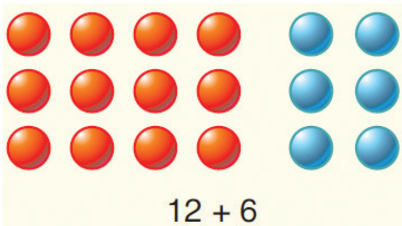
$$(12:3) \cdot 3 = 12.$$

Варирањем, заменом пара 12, 3 паровима 15, 3; 18, 3; 21, 3 итд., као и паровима 12, 2; 12, 4; 12, 6, а затим било којим другим паром бројева где је први од њих дељив другим од њих, разрађује се наведени пример и индукује словни запис $(m:n) \cdot n = m$.

Читалац ће свакако разумети зашто инсистирамо да је први број у овим паровима дељив оним другим. Кад није тако и кад, на пример, пишемо (17:4)·4 = 17 онда је ова једнакост тачна у скупу рационалних или реалних бројева. Међутим, у скупу природних бројева она није нити тачна нити нетачна. У том скупу она је бесмислена! (У скупу природних бројева запис 17:4 нема смисла као природни број, па нити то има израз (17:4)·4).

12.6.8. *Дељење збира и разлике.* И овде правила индукујемо посматрајући посебне случајеве и њихове илустрације.

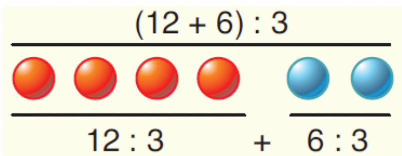
Три другара деле 12 *црвених и* 6 *плавих кликера.*



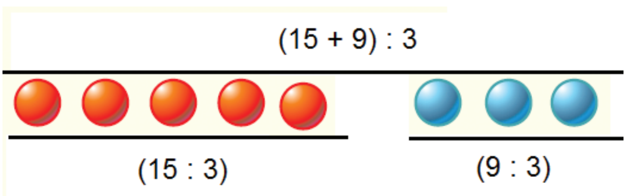
Сл. 61

Сваки од њих добија (12 + 6):3 *кликера. Сваки од њих добија* 12:3 *црвених и* 6:3 *плавих кликера, а што је* 12:3 + 6:3 *кликера. Можеш да пишеш*

(12 + 6):3 = 12:3 + 6:3.



Замисли слагалицу са 15 *црвених и* 9 *плавих кликера. Сваки од њих добија*



Сл. 62

Можеш да пишеш

$$(15 + 9):3 = \_\_\_:\_\_ + \_\_:3.$$

После једног броја овако обрађених примера кад се слагалице или виде или замишљају, деци се задају вежбе попут следеће:

Пиши бројеве који недостају

$(16 + 10):2 = 16:2 + 10:2 = \_\_ + \_\_ = \_\_\_$, $(36 + 42):6 = \_\_\_:\_\_ + \_\_\_:\_\_$ $= \_\_ + \_\_ = \_\_\_$, $(48 + 32):8 = \_\_\_:\_\_ + \_\_\_:\_\_ = \_\_ + \_\_ = \_\_\_$, итд.

Слични примери се користе и да се обради дељење разлике. Наведимо још извођење тих правила у општем облику, користећи модел са кутијама у којима су двобојни кликери.

У свакој од k кутија налази се једнак број црвених и плавих кликера. Укупно црвених кликера је m, а плавих n. У једној кутији је $(m + n):k$ кликера. У једној кутији је $m:k$ црвених и $n:k$ плавих кликера, а то је $m:k + n:k$ кликера. Једначећи записе за број кликера у једној кутији, добијамо

$$(m + n):k = m:k + n:k.$$

У свакој од k кутија налази се једнак број црвених и плавих кликера. Укупно, то је n кликера од којих су њих m плави. Црвених кликера је m – n, а у једној кутији их је $(m - n):k$. У једној кутији је $m:k$ кликера, њих $n:k$ су плави, а црвених је $m:k - n:k$. Једначећи два записа за број црвених кликера, добијамо

$$(m - n):k = m:k - n:k.$$

Наведимо још примере који показују примену првог од ових правила на дељење у скупу N_{100}.

Рачунај

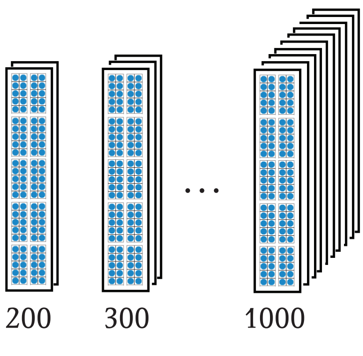
$39:3 = (30 + 9):3 = 30:3 + 9:3 = \_\_\_ + \_\_ = \_\_\_$,
$52:4 = (40 + 12):4 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$,
$91:7 = (70 + 21):7 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, итд.

13. БЛОК БРОЈЕВА ДО 1 000

Видели смо да је блок бројева до 100 послужио да у том оквиру операције множења и дељења стекну значење везивањем за представе о мултипликативној схеми и схватањем одговарајућих задатака множења, односно дељења. У техничком смислу главни дидактички задаци у оквиру тог блока били су алгоритми цифарског сабирања и одузимања кад почиње преношење, односно позајмљивање десетице, а затим долази изградња таблице множења и дељење са 2 до 20, са 3 до 30, . . . , са 9 до 90. Последња два од ова три задатка морају бити до те мере обрађени да постану део трајног усменог фонда, на коме се заснива цифарско множење и дељење бројева датих својим декадним записима.

Сем производа из таблице множења, само један ограничен број њих има вредност у овом блоку, као, на пример, $28\cdot3 = (20 + 8)\cdot3 = 20\cdot3 + 8\cdot3 = 60 + 24 = 84$, $12\cdot8 = (10 + 2)\cdot8 = 10\cdot8 + 2\cdot8 = 80 + 16 = 96$, али то није случај са производима $a\cdot3$ кад је $a > 33$ или $a\cdot8$ кад је $a > 12$. Лако је навести и друге случајеве производа двоцифреног и једноцифреног броја чија вредност излази из блока бројева до 100. Сем $10\cdot10$, из тог блока излазе и вредности производа два двоцифрена броја. Очигледно је блок бројева до 100 „мали“ оквир у коме би се обрадили поступци множења и дељења једноцифреним бројем, а што су основни случајеви на које се своде општи поступци извођења ових операција. Подеснији оквир за обраду ових основних случајева је блок бројева до 1 000. Програм за нашу основну школу овај шири блок укључује у садржаје аритметике за 3. разред и његова обрада је технички доста захтевна.

Проширујући блок бројева до 100, прво се уводе стотине прве хиљаде: $2\cdot100$ краће записујемо као 200 и читамо *двеста*, $3\cdot100$ краће записујемо као 300 и читамо *триста*, . . . , $10\cdot100$ краће записујемо као 1 000 и читамо *хиљада*. Ове нове бројеве представљамо као табле са по 100 кружића:



Сл. 63

Сабирање и одузимање стотина даје се у виду вежби:

$4 + 3 = 7$, $40 + 30 = 70$, $400 + 300 = 700$, $6 + 2 = 8$, $60 + 20 = 80$, $600 + 200 = 800$
$7 - 3 = 4$, $70 - 30 = 40$, $700 - 300 = 400$, $8 - 5 = 3$, $80 - 50 = 30$, $800 - 500 = 300$, итд.

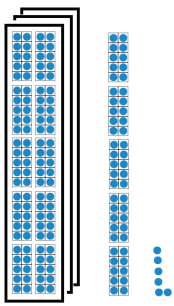
Пратећи ове вежбе, наставник подстиче схватање стотине као јединице пребројавања, па коментарише: да, 4 стотине и три стотине су 7 стотина, . . . , да, 8 стотина мање 5 стотина су 3 стотине, итд.

Сви остали бројеви из овог блока се уводе као збирови стотина и двоцифрених бројева. На пример 400 + 83 пишемо краће као 483 и читамо *четиристо осамдесет три*, итд. Пошто је ово лако усвојиво могу се одмах дати вежбања као ова:

Допуни шта треба!

Збир	*краће пишемо*	*и читамо*
400 + 57	______	______________________________
600 + 18	______	______________________________
700 + 8	______	______________________________
900 + 30	______	______________________________ , итд.

Затим би следиле вежбе разлагања троцифрених бројева у збир јединица, десетица и стотина. На пример, $356 = 300 + 50 + 6$, па се број 356 састоји од 3 стотине, 5 десетица и 6 јединица, односно од 6 јединица, 5 десетица и 3 стотине. Даље, пишући $356 = 350 + 6$, број 356 садржи 3 стотине и 5 десетица тј. садржи 35 десетица, итд.



356

Сл. 64

Да бисмо истакли све кораке који прате цифарско сабирање два троцифрена броја, пишемо, на пример:

$289 + 367 = (200 + 80 + 9) + (300 + 60 + 7) = (200 + 300) + (80 + 60) + (9 + 7) = (200 + 300) + (80 + 60) + 16 = (200 + 300) + (80 + 60) + (10 + 6) = (200 + 300) + (80 + 60 + 10) + 6 = (200 + 300) + 150 + 6 = (200 + 300) + (100 + 50) + 6 = (200 + 300 + 100) + 50 + 6 = 600 + 50 + 6 = 656$,

а ти кораци буду: разлагање датих бројева на збирове стотина, десетица и јединица, сабирају се јединице са јединицима, десетице са десетицама и стотине са стотинама (примењује се асоцијативни закон), налази се збир јединица, разлаже се тај број на збир једне десетице и 6 јединица, преноси се једна десетица (примењује се асоцијативни закон), сабирају се десетице, разлаже се збир десетица на збир једне стотине и 5 десетица, преноси се 1 стотина (примењује се асоцијативни закон), сабирају се стотине и тада добијени збир одговара цифарском запису траженог броја, који се, на крају, цифарски записује.

Читалац примећује да је овакав поступак сабирања врло компликован и да је овакво његово изражавање такође компликовано, и као такво без основе да се унесе као поступак у реалну наставу у разреду. С друге стране читалац ће увидети велику предност записа који представљају вертикално сабирање, где распоред цифара у коме се формирају колоне јединица, десетица, стотина итд. истиче њихову месну вредност. Увидеће такође да заснивање (и разумевање) тих поступака не ослања се на правила алгебре, него на идеју о прегруписавању елемената скупова (кружића слагалица) који представљају сабирке, а то прегруписавање не утиче на вредност збира који се тражи, па се опет и овде види наслањање на Канторов принцип инваријантности броја.

13.1. *Сабирање у блоку бројева до* 1 000. Идући поступно издвојићемо три типична случаја. При томе се ослањамо у потпуности на увежбаност сабирања двоцифрених бројева у блоку бројева до 100.

1.

$$\begin{array}{r} 87 \\ +\ 69 \\ \hline \end{array}$$

Збир два двоцифрена броја

$$\begin{array}{r} 1 \\ 87 \\ +\ 69 \\ \hline 6 \end{array}$$

Сабирамо јединице са јединицама, добијамо 16, па то је 1 десетица и 6 јединица. Пишемо 6 у колони јединица и преносимо 1 у колону десетица.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 87 \\ +\ 69 \\ \hline 156 \end{array}$$

Сабирамо десетице са десетицама, а то је 6 плус 8 плус 1, тј. 15 десетица које чине 1 стотину и 5 десетица. Пише се 5 у колони десетица и 1 у колони стотина. Итд.

2.

$$\begin{array}{r} 658 \\ +\ 89 \\ \hline \end{array}$$

Збир троцифреног и двоцифреног броја.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 658 \\ +\ 89 \\ \hline 7 \end{array}$$

Сабирамо јединице са јединицама, добијамо 17, а то је 1 десетица и 7 јединица. Пишемо 7 у колони јединица и преносимо 1 у колону десетица.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 658 \\ +\ 89 \\ \hline 47 \end{array}$$

Сабирамо десетице са десетицама: 8 плус 5 плус 1, а то је 14 десетица, односно 1 стотина и 4 десетице. Пишемо 4 у колони десетица и преносимо 1 у колону стотина.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 658 \\ +\ 89 \\ \hline 747 \end{array}$$

Сабирамо стотине: 6 стотина и 1 стотина су 7 стотина. Пишемо 7 у колони стотина. Итд.

3.

$$\begin{array}{r} 475 \\ +\ 389 \\ \hline \end{array}$$

Збир два троцифрена броја.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 475 \\ +\ 389 \\ \hline 4 \end{array}$$

Сабирамо јединице са јединицама, добијамо 14, а то је 1 десетица и 4 јединице. Пишемо 4 у колони јединица, а преносимо 1 у колону десетица.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 475 \\ +\ 389 \\ \hline 64 \end{array}$$

Сабирамо десетице са десетицама: 8 + 7 + 1 = 16, а то је 1 стотина и 6 десетица. Пишемо 6 у колони десетица, а преносимо 1 у колону стотина.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 475 \\ \underline{+\ 389} \\ 864 \end{array}$$

Сабирамо стотине са стотинама: 3 + 4 + 1 = 8. Пишемо 8 у колони стотина. Итд.

Текст који прати ове поступке подстиче одговарајуће иконичке представе (које по потреби наставник такође може да припреми као пратеће илустрације). Али, на крају, наставник компресује такав текст и своди га по форми на унутрашњи говор. На пример, у случају трећег примера то би било: 9 плус 5 је 14, пишемо 4 а 1 преносимо; 8 плус 7 плус 1 је 16, 6 пишемо а 1 преносимо; 3 плус 4 плус 1 је 8, пишемо 8.

13.2. *Одузимање у блоку бројева до* 1 000. И у случају одузимања разликоваћемо три типична случаја, а при том претпостављамо увежбаност коју су ученици стекли кроз обраду ове операције у блоку бројева до 100.

1.

$$\begin{array}{r} 321 \\ \underline{-\ \ 84} \end{array}$$

Одузимање двоцифреног од троцифреног броја.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 321 \\ \underline{-\ \ 84} \\ 7 \end{array}$$

Позајмљује се 1 десетица. 11 јединица мање 4 јединице су 7 јединица. Пишемо 7 у колони јединица.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 321 \\ \underline{-\ \ 84} \\ 37 \end{array}$$

Позајмљује се 1 стотина. Та стотина са 1 преосталом десетицом чини 11 десетица, Од којих се одузима 8 десетица. То су 3 десетице. Пишемо 3 у колони десетица.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 321 \\ \underline{-\ \ 84} \\ 237 \end{array}$$

Остају 2 стотине (једна је позајмљена). Пишемо 2 у колони стотина.

Итд.

2.

$$\begin{array}{r} 624 \\ -\,338 \\ \hline \end{array}$$

Одузимање два троцифрена броја.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 624 \\ -\,338 \\ \hline 6 \end{array}$$

Позајмљује се 1 десетица. 14 јединица мање 8 јединица су 6 јединица. Пишемо 6 у колони јединица.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 624 \\ -\,338 \\ \hline 86 \end{array}$$

Позајмљује се 1 стотина. 11 десетица мање 3 десетице су 8 десетица. Пишемо 8 у колони десетица.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 624 \\ -\,338 \\ \hline 286 \end{array}$$

5 стотина мање 3 стотине су 2 стотине. Пишемо 2 у колони стотина.

3.

$$\begin{array}{r} 603 \\ -\,489 \\ \hline \end{array}$$

Преношење стотине кад у умањенику нема десетица.

$$\begin{array}{rr} 1 & \\ 59 & 13 \\ -\,48 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Позајмљује се 1 стотина, а затим од 10 десетица позајмљује се 1 десетица. Све то записујемо на нов начин.

$$\begin{array}{rr} 1 & \\ 59 & 13 \\ -\,48 & 9 \\ \hline 11 & 4 \end{array}$$

Одузимамо јединице од јединица, пишемо 4; па затим десетице од десетица, пишемо 1; и на крају стотине од стотина, пишемо1.

4.

$$\begin{array}{r} 600 \\ -\ 273 \\ \hline \end{array}$$

Умањеник нема ни десетица ни јединица.

$$\begin{array}{rr} 1 & \\ 59 & 10 \\ -\ 27 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Позајмљује се 1 стотина, па затим од 10 десетица позајмљује се 1 десетица, а њих 9 остају у колони десетица. Све то записујемо на нов начин.

$$\begin{array}{rr} 1 & \\ 59 & 10 \\ -\ 27 & 3 \\ \hline 32 & 7 \end{array}$$

Одузимамо јединице од јединица, десетице од десетица и стотине од стотина.

Пошто се увежбају, компресују се и ови поступци при чему се тада ни не записује такво одузимање на нов начин.

13.3. *Множење једноцифреним бројем.* Записујући симболички (алгебарски) и истичући све кораке, производ троцифреног и једноцифреног броја би текао на овакав начин:

$$78\cdot 6 = (70 + 8)\cdot 6 = 70\cdot 6 + 8\cdot 6 = 70\cdot 6 + 48 = 70\cdot 6 + (40 + 8) =$$
$$(70\cdot 6 + 40) + 8 = (420 + 40) + 8 = 460 + 8 = 400 + 60 + 8 = 468.$$

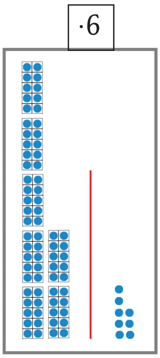
Истакли смо следеће кораке: 78 се пише као збир десетица и јединица (70 + 8), примењује се правило множења збира, налази се производ јединица (48), тај производ се разлаже на збир десетица и јединица (40 +8), 4 десетице се здружују са десетицама (70·6 + 40), множе се десетице (420), сабира се тај производ са 4 десетице које су пренесене (460), разлажу се десетице у збир стотина и десетица (400 + 60), пише се према том збиру цифарски запис (468).

Иако је овим путем анализа поступка множења потпуна и чини га јасним, овај поступак није погодан за обраду у разреду. Цифарско множење, уз праћење месне вредности цифара, има предност и ми ћемо те поступке множења овде обрађивати. Разумевање тих поступака заснива се на иконичким представама које ће чинити одговарајуће бројевне слике.

Кад се производ, рецимо $7\cdot a$ иконички представља, узима се скуп A, $card(\mathrm{A}) = a$ на 7 места. Кад је скуп A унија својих дисјунктних подскупова A_1, A_2, A_3, регрупишући можемо узети A_1 на 7 места, а тако и A_2 одн. A_3 па ће и тај скуп имати кардиналност $7\cdot a$.

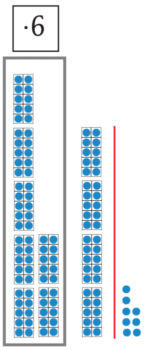
Кад се ради са бројевним сликама, овде ће A_1, A_2 и A_3 бити групе кружића које представљају јединице, десетице и стотине.

1.



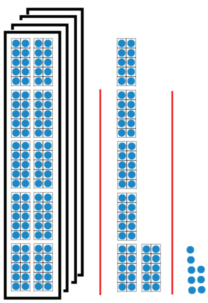
78·6 = ___ ___ ___

Множење двоцифреног броја једноцифреним.
Означавају се места за цифре у производу



78·6 = ___ ___ 8
4

Множе се јединице: 6·8 = 48, а то су 4 десетице и 8 јединица. Пише се 8 на месту јединица, а 4 се преноси у позицију десетица.

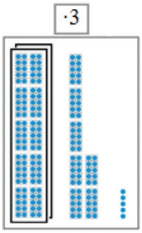


78·6 = 468

Множе се десетице: 6·7 = 42 и томе додају 4 десетице, па је то укупно 46 десетица, односно 4 стотине и 6 десетица.

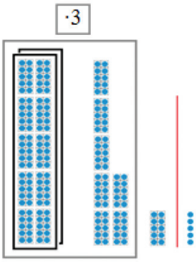
Сл. 65

2.



$275 \cdot 3 = \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

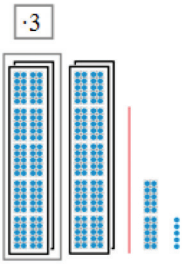
Множење троцифреног броја једноцифреним. Означавају се места за цифре у производу.



$275 \cdot 3 = \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ 5$

1

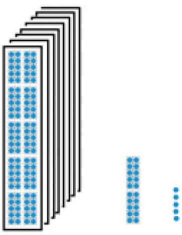
Множе се јединице 3·5=15, а то је 1 десетица и 5 јединица. Пише се 5 на месту јединица, а десетица преноси у позицију десетица.



$275 \cdot 3 = \underline{\quad}\ 25$

2

Множе се десетице 3·7=21 и 1 десетица коју смо пренели, па су то 2 стотине и 2 десетице. Пишемо 2 на месту десетица и преносим 2 у позицију стотина.



$275 \cdot 3 = 825$

Множе се стотине 3·2=6, и додају 2 стотине које су биле пренете, па се 8 пише на месту стотина.

Сл. 66

13.4. *Дељење једноцифреним бројем.* Супротно множењу, дељење се изводи, речено наративно, прво дељењем стотина, затим десетица и на крају јединица. Записујући симболички и, истичући све кораке, дељење троцифреног броја једноцифарским текло би овако:

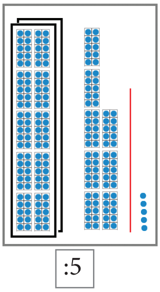
$792:6 = (700 + 90 + 2):6 = (600 + 100 + 90 + 2):6 = 600:6 + (190 + 2):6 = 100 + (180 + 10 + 2):6 = 100 + 180:6 + (10 + 2):6 = 100 + 30 + 12:6 = 100 + 30 + 2 = 132$

Истакнути су следећи кораци: 792 се пише као збир стотина, десетица и јединица (700 + 90 + 2), број стотина се разлаже на сабирак дељив са 6 и остатак (600 + 100), примењује се правило дељења збира, деле се стотине (600:6 = 100) и разлажу десетице на сабирак дељив са 6 плус остатак по броју десетица (180 + 10), деле се десетице (180:6 = 30), деле се јединице (12:6 = 2), па се добијени збир стотина десетица и јединица записује цифарски.

Ни овај поступак није подесан за обраду у разреду. Зато ћемо обрадити овде поступак цифарског дељења, ослоњен на иконичке представе.

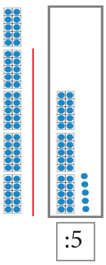
Код иконичког представљања дељеник је бројевна слика, а дељење је квотизација, делећи редом стотине, десетице и на крају јединице. Разликоваћемо два случаја који су типични за овај поступак.

1.



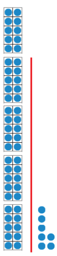
$285:5 = \_\_\ \_\_$

Деле се стотине, десетице и јединице. Пишу се два држача места за цифре у количнику.



$\underline{28}5:5 = 5\ \_\_$
35

28 десетица подељених са 5 су 5 десетица и њих 3 остају које се преносе у позицију јединица.

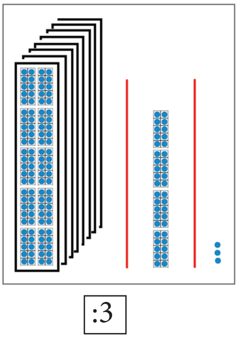


$\underline{28}5:5 = 57$
$\underline{35}$
0

35 јединица дели се са 5, а то је 7 јединица. Пише се 7 на месту јединица.

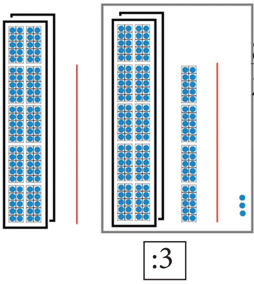
Сл. 67

2.



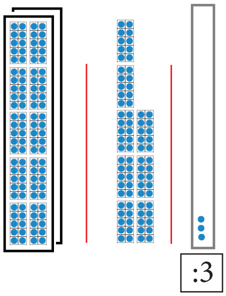
843:3 = ___ ___ ___

Деле се стотине, десетице, јединице. У количнику се назначавају 3 држача места.



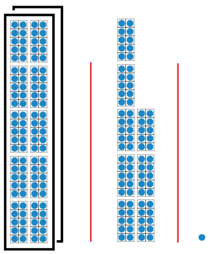
843:3 = 2 ___ ___
2

Деле се 8 стотина па су то 2 стотине и 2 остају и преносе се у позицију десетица.



843:3 = 28 ___
24
 03

24 десетице деле се са 3, што је 8 десетица. Пише се 8 на месту десетица.



843:3 = 281
24
 03
  0

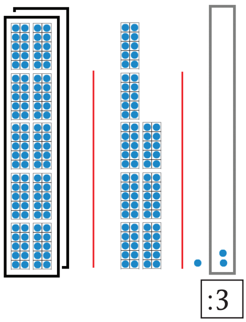
Деле се 3 јединице са 3 и добија 1 јединица. Пише се 1 на месту јединица.

Сл. 68

Кад се дели 845 са 3 све слике су исте као у претходном примеру, само што има 5 јединица, а и записи су исти, сем што уместо 3 стоји 5 и остатак буде 2. Ти записи су:

$845:3 = \_\_\ \_\_\ \_\_$,	$\underline{8}45:3 = 2\ \_\_\ \_\_$,	$\underline{8}45:3 = 28\ \_\_$,	$\underline{8}45.3 = 281$
	2	$\underline{24}$	$\underline{24}$
		05	$\underline{05}$
			2

У овом случају последња слика би истицала остатак, и она би изгледала:



Сл. 69

и сугерисала би да су 2 јединице остале неподељене.
Такође треба обратити пажњу на случајеве кад се нуле јављају у запису количника. На пример:

$\underline{5}15:5 = 103$	1 десетица кад се дели са 5 добија се 0 десетица, пише се 0 на месту десетица а остатак је 1 десетица.
$\underline{01}$	
$\underline{15}$	
0	

ЛИТЕРАТУРА

[Ar] Arnheim R. (1969), *Visual Thinking*, Berkeley University of California Press.

[Bour] Bourbaki N. (1939–1972), *Elements of Mathematics*, Paris: Edition Hermann.

[Bro] Brownell W. A. (1947), *The place of Meaning in the Teaching of Mathematics*, Elementary School Journal, 47, 256–265.

[Bru$_1$] Bruner J. (1990), *The Acts of Meaning*, Harvard University Press.

[Bru$_2$] Bruner J, (1996), *The Culture of Education*, Harvard University Press.

[Cai] Cai J., Knuth E. (Eds.) (2011), *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Berlin: Springer.

[Can] Cantor G. (1895), *Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Annalen, Band 46, Num. 4, pp. 481–512.

[Fr$_1$] Freudenthal H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht-Holland, D. Reidel Publishing Company.

[Fr$_2$] Freudenthal H. (1978), *Weeding and Sowing*, Dordrecht-Holland, D. Reidel Publishing Company.

[Ki$_1$] Kieran C. (2004), *Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it*? The Mathematics Education, 8, 139–151.

[Ki$_2$] Kieran C. (2011), *Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching*. In J. Cai , E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, pp. 579–593, Berlin: Springer

[Kil] Kilpatrick J., Swafford J. Findell B. (Eds.) (2001), *Adding it up. Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

[Ler] Lerman Stephen (Editor), (2014), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer Reference.

[Ma$_1$] Ma L. (1999), *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey.

[Ma$_2$] Ma L. (2013), *A Critique of the structure of the U.S. Elementary School Mathematics*, Notices of the AMS, 60, No. 10.

[Mar] Marjanovic M. M. (1999–2004), *A Broader Way Through Themas of Elementary School Mathematics*, The Teaching of Mathematics, II, 1, (1999), 41–58; II, 2, (1999), 81–103; III, 1, (2000), 41–51; V, 1, (2002), 47–55; VI, 2 (2003), 113–120; VII, 1, (2004), 35–52; VII, 2, (2004), 71–91; (http://elib.mi.sanu.ac.rs/journals/tm)

[Mar-Man] Marjanović M. M., Mandić A. N. (2009), *Numbers as Visible Shapes*, The Teaching of Mathematics, XII, 1, 45–49.

[Mar-Man-Ze] Marjanović M. M., Mandić A., Zeljić M. (2014), *Structuring the Subject Matter of Arithmetic* I, The Teaching of Mathematics, XVII, 2, 51–75.

[Mar- Ze] Marjanović M. M., Zeljić M. (2013), *Algebra as a Tool for Structuring Number Systems*, The Teaching of Mathematics, XVI, 2, 47–66.

[Mo] Monteith A. (1928), *The Teaching of Arithmetic*, George G. Harrap & Company, Ltd. London.

[Proc$_1$] *Proceedings of the* I ICME, Lyon 1969, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht – Holland.

[Proc$_2$] *Proceedings of the* II ICME, (Editor A. G. Howson), Exeter 1972, Cambridge University Press, 1973.

[Sk$_1$] Skemp R. R. (1986), *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books.

[Sk$_2$] Skemp R. R. (1989), *Mathematics in the Primary School*, London: Rutledge Flamer.

[Sr-Eng] Srireman B., English L., (2010), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg.

[Thor] Thorndike E. L. (1922), *The Psychology of Arithmetic*, The Macmillan Company, New York.

[Vy] Vygotskii A. S. (1950), *Thought and Language*, (in Russian), Izbrannye psihologicheskie isledovaniya, Moscow.

[Wi] Wilson G. M. (1951), *Teaching New Arithmetic*, Mac Draw-Hill Book Company, Inc., New York.

ЛИСТА ИМЕНА

Абел, Niels Henrik Abel (1802–1829), норвешки математичар чије значајно стваралаштво укључује доказ да су једначине степена већег од 4 нерешиве алгебарски. Тај резултат се ослања на теорију група коју је Абел развио независно од француског математичара E. Galois.

Арнхајм, Rudolf Arnheim, (1904–2007), амерички перцептуални психолог, рођен у Немачкој, аутор низа књига писаних атрактивним стилом и са врхунском јасноћом.

Бурбаки, Nicolas Bourbaki, колективни псеудоним под којим је група, углавном француских математичара, у периоду од 1938 до 1972. године писала серију књига с намером да целокупну математику заснују на теорији скупова. Тај програм је остао недовршен, али је утицај ове серије књига на обликовање савремене математике био огроман.

Брунер, Jerome Bruner (рођен 1915), амерички когнитивни и развојни психолог, три начина представљања искуства: енактивно, иконички (у сликама) и симболички.

Виет, François Viète (1540–1603), француски математичар, творац словне алгебре (*logistica speciosa*).

Виготски, Лев Семёнович Выготскии (1895–1934), руски психолог посебно значајан за развојну психологију, усвајање нових знања је зависно од претходног учења и датих инструкција, егоцентрични говор детета не ишчезава него се претвара у унутрашњи говор.

Грегори, Duncan Farquharson Gregory (1818–1844), шкотски математичар, настављач Пикокових резултата који су водили логичком сређивању алгебре.

де Морган, Augustus de Morgan (1806–1871), енглески математичар и логичар, познат по тзв. де Моргановим правилима у теорији скупова.

Кантор, Georg Cantor (1845–1918), творац теорије скупова, 1 – 1 кореспонденције и нумеричка еквивалентност скупова, пребројиви и непребројиви скупови, бесконачни кардинални и ординални бројеви.

Коменски, Jan Amos Komensky (1592–1670), чешки педагог, један од првих заговорника образовања за све, творац визуелног метода и велики реформатор школског система.

Песталоци, Johann Heinrich Pestalozzi (1745–1827), швајцарски педагог, значајно утицао на развој модерног образовања, настава усмерена на ученика, индивидуализација и рад у групама.

Пикок, George Peacock (1791–1858), енглески математичар који је поставио алгебру на стриктно логичке основе.

Сервоа, François-Joseph Servois (1767–1847), француски свештеник и математичар.

Скемп, Ruchard R. Skemp (1919–1995), енглески едукатор који је комбиновао математику, образовање и психологију, учење доградњом менталних схема, инструментално разумевање и релацијско разумевање.

Том, Rèné Thom (1923–2002), француски математичар и филозоф, критичар „New Math“ тренда.

фон Рохов, Friedrich Eberhard von Rochow (1734–1805), немачки педагог.

Фројдентал, Hans Freudenthal (1905–1990), холандски математичар који се, у задњем периоду своје каријере, посветио образовању. Врло значајни доприноси дидактици математике. Његовим заузимањем, у периоду New Math-a, Холандија је била поштеђена искушења које је доносио овај тренд.

Milosav M. Marjanović *

STRUCTURING THE CONTENT OF SCHOOL ARITHMETIC

S u m m a r y

Institutions where the primary school teachers are educated usually have a variety of didactics courses on their curricula, among them also a course of didactics of mathematics. The objective of that course is to prepare a student to organize the process of learning and teaching mathematics and how to act on the scene of classroom. But what is particularly important, such a course should also present the content of primary mathematics in a deeper way that enables a student to understand and be aware of all processes through which the concepts are synthesized and the procedures are established. Such an understanding and such awareness will not follow spontaneously from a good knowledge of school mathematics, including also a mathematics course that these students have on curricula of their institutions.

It is even more difficult for these students to combine their own knowledge of mathematics with the knowledge of general didactics and psychology in order to see how the content of primary mathematics is formed on the basis of empirical material. Such difficulties motivate this author to advocate integrated courses of didactics of mathematics which would include some specific themes in psychology along with some themes from the history of mathematics and history of education relevant for this mathematical content. The reader will notice that, to some extent, a number of such themes is also included in this paper.

In general, people think (wrongly) that the content of primary mathematics will be shaped properly by the mathematics teacher in the upper classes. This is a harmful opinion which may cause that this content and this vital period of learning to be taken too much nonchalantly.

Let us also note that all mathematics contents are manifested in one of the following aspects:

– *historical*, when they are seen in the state of their creation,

– *scientific*, when they are presented in a logically compact way and according to the modern achievements of mathematics as a science,

– *didactical*, when they are transposed to meet the needs of learners respecting their cognitive development.

* Serbian Academy of Sciences and Arts, e-mail: milomar@beotel.net

Confusing these aspects may also cause serious misunderstanding. For example, it happens when scientifically pretentious content is assigned to students without adequate cognitive maturity.

Respecting the fact that primary school mathematics is an essential intuitive basis for all further learning, this paper aims to present the arithmetic content within the range of numbers up to 1 000. The permanent meaning of four arithmetic operations is established, and the addition and multiplication tables are built. As for calculation, the algorithms for finding sums and differences of two- and three-digit numbers are worked out in detail. In addition, multiplication and division of two- and three-digit numbers by one-digit numbers are treated with due attention. Since this arithmetic content is divided into the number blocks up to 10, up to 20, up to 100 and up to 1 000, we will follow such structuring when presenting the specific features of our approach. We see as potential readers of this paper, pre-service and in-service teachers whose knowledge of this matter has to be much broader than their operative skills are.

1. **Sets at the sensory level.** Being more general then all other concepts of classical mathematics, the concept of the set has its examples at all levels of abstraction. The lowest of these levels is the case of sets of visible objects in the surrounding space. In that case, we say that a set is at the sensory level. Operations on sets at the sensory level are not formal and they are not denoted symbolically, but instead, they are manipulative activities or more often, some corresponding mental activities. The sets at the sensory level constitute the underlying phenomenology upon which arithmetic is built.

2. ***Orbis pictus* of arithmetic.** Two kinds of images are used to represent the underlying phenomenology of arithmetic graphically. The ones that represent reality which is not immediately experienced are called *pictograms,* whereas the others that represent concepts are called *ideograms*. Typical examples of ideograms are geometric drawings and, in arithmetic, number images. The function of number images is the iconic representation of numbers (or better to say, such images represent sets that are so structured to project their cardinality at the first glance). In this paper number images are designed to represent numbers up to 1 000.

To avoid some often encountered cases of confusion, an image (including drawings) has to be considered as a momentary snapshot, which implies that *two iconic signs taking different places in an image are considered to be different* (For example, a possible equating of two congruent figures is a wrong idea!).

3. **Cantor principle of invariance of number.** The perception of sets precedes the conception of numbers. Cantor described this cognitive process that led to the creation of ideas of numbers in their natural dependence on sets of observable objects as the result of two abstractions: ignoring the nature of elements of a set and the way they are arranged. Having modified slightly this formulation, we expressed the *Cantor principle of invariance of number* in the following way:

Starting with observation of a set of visible objects and abstracting (forgetting)

(I) the nature of these objects

and

(II) any kind of their organization

an abstract idea of number results.

This cognitive principle stands for the formal concept of equivalent sets expressed in terms of one-to-one correspondences. In our approach, arithmetic is relied on this principle, particularly in the case when different expressions, representing one and the same number, are equated.

4. **Counting as an introductory theme of arithmetic.** Elaborating this theme, the following didactical tasks have to be achieved:

– Children learn to recite the number names from one to ten, going onwards and backwards.

– Associating objects with the number names, children practice to count the elements of concrete sets (including their pictorial representations as well).

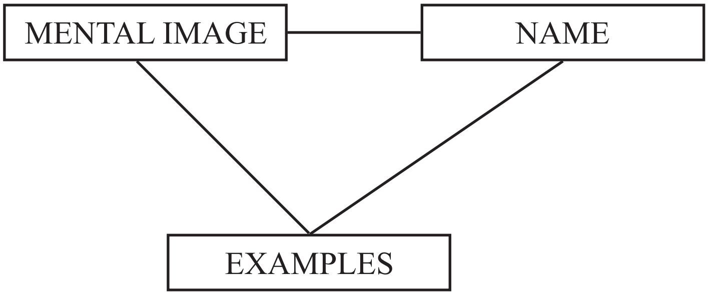
– In case of two sets of different objects, children count their elements, taking each set separately as well as when they are taken together. They understand the meaning of the questions “How many?”, “How many altogether?”.

– Following suitable situations when some objects are taken away, children count and answer questions “How many were there?”, “How many remain?” etc.

– At this stage, children give the answers orally and, by means of visual representations, they start to form abstract ideas of numbers (up to 10) and become familiar with the addition and subtraction tasks.

5. **A schematic representation of concepts.** We use the words “idea” and “concept” with a difference in meaning that we will state precisely here. The word “idea” is used somewhat more freely to denote those abstractions formed as a result of experiencing some relationships or some properties. For example, we say that throughout the activities of counting the ideas of

initial natural numbers are formed. But the activities through which the concepts are formed have to be more complete. First, *corresponding examples* are selected, experiencing of which leads to the formation of an inner representation in the mind, called *mental image*. Then, a word from the natural language is used to denote that concept, called its *name* and, in the case of mathematical concepts, often a symbol denotes a concept. Hence, a concept is a three-component entity consisted of the corresponding examples, the mental image and the name.



Vigotskii calls a class of mutually related concepts a *system of concepts*. In mathematics, such a class is called a (concrete) *mathematical structure*. In psychology their reflection in the mind is called a *mental scheme*. In what follows, we will be concerned with building of number blocks up to 10, up to 20, up to 100 and up to 1 000 which consist of concepts of individual natural numbers.

6. **Block of numbers up to 10.** We describe here what is done when this block is built and which didactical tasks are accomplished.

– The meaning of numbers 1, 2, … , 10 and 0 is established by relating each of them with the corresponding sets of various objects.

– Each of these numbers is elaborated as an individual concept, denoted by its digit and associated with its number image whose shape projects at first glance the meaning of the number that it represents.

– A somewhat more delicate is the case of zero which is related with the materialization of the empty set as being an “empty place”. For example in a sequence of boxes containing less and less marbles the last empty one is an example of the empty place.

– Each digit is written in a number of moves of the hand that are made in a fixed order. Exercising, these moves tend to be more and more regular and the handwriting becomes nicer. It is important that, from the very beginning, children learn to write digits correctly.

– Children are given examples of situations which can be modeled as the idea of two disjoint sets. We call such an idea an *additive scheme* and when the numbers of elements of these sets are given and the number of elements of their union is to be found, we say that this scheme is followed by the *addition task*. As soon as the children are aware of an additive scheme followed by the addition task they write a sum to denote the sought number. This meaning of addition is permanent and should not be confused with a more technical one, when sums are calculated to find the unique decimal notation for their value.

– When an additive scheme is imagined or pictorially represented and when the numbers of elements of the union and of one of these sets are given and the number of elements of the other set is to be found, then we say that this scheme is followed by the *subtraction task*. Examples of situations of this kind provide a permanent meaning for subtraction.

Let us note that, in the classroom practice, additive schemes are mostly given in the form of simple pictures, the sets are “small” (their number of elements does not exceed 10) and the sought numbers are found by counting, but that is not the reason for the teacher not to recognize the importance of the activities when the meaning of these two arithmetic operations starts to be formed.

– Children write two different sums when they denote the number of elements of the union of two disjoint sets taken in two different orders. By equating these sums they discover the rule of *interchange of summands*. Teachers should understand that this rule is one of the principles of arithmetic which is intuitively acceptable, but not being proved in that way.

– A sum (a difference) denotes a number which is called its value. To calculate a sum (a difference) means to express its value by its unique decimal notation. By doing sufficient number of exercises, children are trained to calculate quickly sums and differences when their value is within this block. As already said, calculation at this stage reduces to counting and the imagery that children develop in contact with the number images often helps them perform these simple calculations.

– Numbers up to 10, together with the operations of addition and subtraction and the relation “to be larger than” constitute a system of concepts (a mathematical structure) that we denote by $\{N_{10}, +, -, <\}$.

7. **Block of numbers up to 20.** The majority of children can count up to 20, reciting the number names in order. But counting is not taken any

longer to be a base upon which the number blocks are built. A sum as, for example, 10 + 7 already has its meaning established: it denotes the number of elements of the union of two sets, one having 10 elements and the other one 7. Decimal notation for that number is not included in the material of which block of numbers up to 10 is built. But the use of such notations is the way how the block of numbers up to 10 is extended to the block of numbers up to 20. Namely, the sums : 10 + 1, 10 + 2, … , 10 + 10 are denoted shortly as 11, 12, … , 20 respectively and these numbers are read: eleven, twelve, … , twenty. By equating two notations for the same number, the equalities 10 + 1 = 11, 10 + 2 = 12, … , 10 + 10 = 20 can be written.

– Further properties of addition and subtraction are derived: the rule of association of summands, the rule of subtracting a number from a sum, the rule of subtracting a sum from a number, the rule of interchange of the subtrahend and the difference, etc. Application of these rules is not a very simple task for children. Thus, the exercises of this kind have to be programmed using the technique of place holders.

– Methods of adding and subtracting when the 10-line is crossed are worked out in detail. By practicing these methods, children learn to calculate quickly the results of all entries of addition table. Therefore, the block of numbers up to 20 is a natural framework within which the addition (and subtraction) table is formed.

8. **Block of numbers up to 100.** The sums 20 + 1, 20 + 2, … , 20 + 10, and their decimal notations 21, 22, … , 30 make the first step in extension. Then 30 + 1, 30 + 2, … , 30 + 10 and their decimal notations 31, 32, … , 40, … , 90 + 1, 90 + 2, … , 90 + 10 and their decimal notations 91, 92, … , 100 are the numbers of this block. The reader will notice that addition, not the counting, is the base of this extension.

– Technique of vertical addition (including the cases when one ten is carried over) and vertical subtraction (including the cases when one ten is borrowed) are presented in detail. Number images are employed to illustrate these procedures and to supply them with the meaning.

– These procedures are also described in terms which underline decimal structure of the manipulated numbers but as soon as these manipulations become more automatic, such descriptions are simplified obtaining the abbreviated form of the inner speech.

– Up to this stage the block of numbers up to 100 is an additive structure which we denote by writing $\{N_{100}, +, -, <\}$. But this block is also a natural range of numbers within which the meaning of multiplication and division is established.

– A situation which can be modeled as a finite family of finite equipotent sets is called a *multiplicative scheme*. When the number m of the members of this family and the number n of the elements of these sets are given and the number p of the elements of their union is to be found, we say that this is a *multiplication task* that follows this scheme. When p and n are given and m is to be found, we say that this is a *division task* that follows this scheme and which is called *partition* and when p and m are given and n is to be found, we also say that this is a *division task* that follows this scheme and which is called *quotation*.

– Equivalent ways of representing a multiplicative scheme as a rectangular arrangement or a direct product of two sets are also considered.

– All products that enter multiplication table have their iconic representations which are used to suggest quick calculations of their value. Thus, children take an active part in the building of this table.

– Properties of multiplication are established and expressed: the rule of interchange of factors, the rule of association of factors, the rule of multiplication of sums and differences by a number, etc. A collection of m boxes each containing n marbles is a suitable model of the multiplicative scheme. Similarly, k packages, each containing m boxes and each box containing n marbles is a suitable model for the triple product. Teachers should be aware of the role of the rule of association of factors (the associative law for multiplication) which reduces triple and multiple products to the product of two numbers. Thus, it is enough to form the multiplication table in the case of products of two numbers or to express properties of multiplication in the same case as above.

– The following properties of division are established and formulated: the rule of interchange of the divisor and the quotient, the rule of division of a sum by a number, the rule of division of a difference by a number, etc.

– By doing exercises, children learn the idea of division with remainder and particularly in the cases of division: by 2 up to 20, by 3 up to 30, … , by 9 up to 90 they do these calculations mentally. Together with addition and multiplication tables, these cases of division are also the material which enters the long term memory store.

With multiplication and division, the block of numbers up to 100 becomes a still richer structure which we denote by writing $\{N_{100}, +, -, \cdot, :, <\}$.

9. **Block of numbers up to 1 000.** Products 2·100, 3·100, … , 10·100 have their meaning already established in the block N_{100}. Denoting them by their decimal notations 200, 300, … , 1 000, the hundreds of the first thousand are introduced. Then, the sums of hundreds and two-digit numbers as,

for example: 200 + 18, 300 + 71, 900 + 54 etc., also obtain their decimal notation: 218, 371, 954 etc., which gives the meaning to the numbers up to 1 000. This block already has a rich structure, which is denoted by writing $\{N_{1000}, +, -, \cdot, :, <\}$. Therefore, the main didactical tasks to be accomplished here are technical calculations when the numbers are given in their decimal notation. Our analysis demonstrates it clearly that calculation of the sum of two three-digit numbers when they are written as sums of units, tens and hundreds, becomes rather awkward to be practiced, particularly when all steps have to be symbolically expressed. (The same situation is with differences of such numbers when performed symbolically). Instead, vertical addition and subtraction when columns of units, tens and hundreds, are formed normally has an advantage.

– Vertical addition and subtraction of two three-digit numbers is worked out in detail. Formal operations on digits are illustrated by the means of number images and such illustrations provide a full understanding of these procedures. Description of these activities also turns spontaneously into inner speech forms.

– Multiplication and division of three-digit numbers by one-digit numbers is also illustrated by the use of number images and a thorough elaboration of this theme is a necessary introduction to the more complex cases of multiplication and division of multi-digit numbers.