СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

SERBIAN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS

SCIENTIFIC MEETINGS

Book CLXXXII

PRESIDENCY

Book 12

MIHAILO PETROVIĆ ALAS

REGARDING ONE HUNDRED AND FIFTY YEARS SCIENCE BIRTH

Scientific meeting with an international partake,
held at the Serbian Academy of Sciences and Arts
on October 2–3, 2018

BELGRADE 2019

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

НАУЧНИ СКУПОВИ

Књига CLXXXII

ПРЕДСЕДНИШТВО

Књига 12

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ АЛАС

ПОВОДОМ СТО ПЕДЕСЕТ ГОДИНА ОД РОЂЕЊА

Научни скуп са међународним учешћем одржан
у Српској академији наука и уметности,
2–3. октобра 2018.

БЕОГРАД 2019

Програмски одбор:
Копредседници: *Жарко Мијајловић, Градимир Миловановић, Стеван Пилиповић*
Чланови:*Војислав Андрић, Зоран Каделбург, Миљан Кнежевић, Александар Липковски, Зоран Огњановић, Зоран Марковић, Миодраг Михаљевић*

Организациони одбор:
Зоран Огњановић, Војислав Андрић, Миљан Кнежевић, Марија Шеган-Радоњић, Маја Новаковић, Јелена Катић, Небојша Икодиновић, Александра Делић, Марек Светлик

Уредници
академик Градимир Миловановић
академик Стеван Пилиповић
др Жарко Мијајловић

Издавачи
Српска академија наука и уметности
Београд, Кнеза Михаила 35
Математички факултет Универзитета у Београду
Београд, Студентски трг 16
Математички институт САНУ
Београд, Кнеза Михаила 36
Друштво математичара Србије
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

Дизајн корица
Драгана Лацмановић-Лекић

Технички уредници
Александра Делић
Миљан Кнежевић
Никола Стевановић

Лектура и коректура
Весна Шубић

Штампа
Colorgrafx, Београд

Тираж
600 примерака

Подршка Министарства просвете, науке и технолошког развоја

ISBN: 978-86-7025-825-9
ISBN: 978-86-7589-136-9

Садржај

САВРЕМЕНИ ПОГЛЕД НА ДИСЕРТАЦИЈУ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

АЛЕКСАНДАР Т. ЛИПКОВСКИ*

А п с т р а к т. – Михаило Петровић је своју докторску дисертацију одбранио у Паризу 1894. године пред комисијом коју су чинили Ермит, Пикар и Пенлеве. Од тада до данас много је писано о Михаилу Петровићу, о овим и другим његовим резултатима, као и о његовом утицају на српску математику и математичаре. Па ипак, до данас нема ниједне суштинске анализе комбинаторно-геометријских метода које је Петровић користио у својој дисертацији. Циљ предавања је да ову чињеницу промени и са савременог становишта објасни порекло и значај Петровићеве методе, као и да покуша да дâ неке смернице за наставак његовог рада.

1. Тема и метод Петровићеве дисертације

Михаило Петровић Алас завршио је Велику школу у Београду 1889. године и отишао у Париз да настави студије, уписавши се после положеног пријемног испита 1890. на École normale supérieure (Section des Sciences). Тамо је завршио студије (licence) из математике 1892. и физике 1893, и 29. јуна 1894. докторирао са темом „Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algebriques" пред комисијом коју су чинили највећи француски математичари тога времена различитих генерација: Шарл Ермит[2] као председник и Емил Пикар[3] и Пол Пенлеве[4] као испитивачи. Петровић је свој рад посветио математичарима Жилу Танерију[5] и Полу Пенлевеу, одакле се може закључити да су

* Математички факултет, Универзитет у Београду, и-мејл: acal@matf.bg.ac.rs

[2] Charles Hermite, 1822–1901.
[3] Charles Emile Picard, 1856–1941.
[4] Paul Painlevé, 1863–1933.
[5] Jules Tannery, 1848–1910.

они били главни ментори и инспиратори Петровићевог рада. Исте те 1894. године Петровић постаје професор на Великој школи у Београду, наследивши на том месту математичког доајена у Србији Димитрија Нешића [1]. Петровићева дисертација је преведена на српски језик и објављена [2].

Као прави ученик француске математичке школе тога времена, Михаило Петровић је проучавао квалитативне особине диференцијалних једначина. Крај 19. века обележен је напорима на проучавању квалитативног понашања решења одређених класа диференцијалних једначина, што је кулминирало Поенкареовим виђењем Analysis Situs – анализе положаја. Петровићеви математички узори имали су сличан пут. Танери је докторирао код Ермита двадесет година пре Петровића, 1874. године са темом „Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables". Пенлеве је био Пикаров ученик и докторирао је код њега 1887. године са темом „Sur les lignes singulières des fonctions analytiques", мада је смернице за научни рад добијао и из Гетингена, од Феликса Клајна[6] и Хермана Шварца[7]. Петровићев докторат био је посвећен специјалним условима под којима опште решење дате диференцијалне једначине има непокретне нуле и полове (тј. нуле и полове који не зависе од избора константи у општем решењу).

Значајно је питање историје српске математике зашто Петровићеви резултати из дисертације нису привукли друге математичаре да их наставе и побољшају. Одговор се обично тражи на две стране. Прво, Петровић је дошао из „математички слабе" Србије и вратио се у њу, па други крупни математичари нису озбиљно анализирали његове резултате. Друго, у математичкој средини у Србији нико није био у стању да озбиљно схвати и унапређује његове резултате, промовишући његове революционарне идеје, а и сам Петровић беше захваћен вртлогом бурних историјских догађаја по свом повратку. На жалост, оваква се ситуација одржава до данашњег дана. Постоје многи прикази Петровићеве дисертације у српској литератури (М. Томић [3], Б. Станковић [4] и др.), али нико, барем колико је познато аутору ових редова, није проучавао Петровићев рад са становишта његових метода, и није покушао да га настави. Али, по мишљењу аутора, то нису једини разлози оваквог историјског развоја догађаја. Као што је речено, Петровићев докторат био је посвећен истраживању критичних тачака општих решења дате диференцијалне једначине. Он је покушао да дâ анализу непокретних (тј. независних од интеграционих константи) нула и полова решења обичне диференцијалне једначине користећи своју комбинаторно-геометријску методу у којој централно место има један конвексни равански полигон повезан са том једначином. У другом делу своје дисертације, Петровић покушава да пренесе своје резултате на вишедимензиони случај.

[6] Christian Felix Klein, 1849–1925.

[7] Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921.

2. Преглед историје, развоја и примена Њутновог полигона пре Петровића

Методе Петровићевог типа имају дугу и веома сличну историју. Оне се појаве у инспирацији генија, а онда падају у заборав, јер од математичара који би се њима бавио изискују дубоко познавање више математичких области. У времену уске специјализације и омеђивања области математике то је бивало све теже и теже. И тако то траје, све док не дође нова инспирација генија, која методу оживи и допринесе даљем развоју да би, као по неписаном правилу, у наредној генерацији математичара све опет пало у заборав, срећом (или Божјим провиђењем) привремени.

Није јасно када се први пут појавила репрезентација монома $x^m y^n$ тачкама равни (m, n) и одговарајућег конвексног омотача. Прво записано помињање такве методе у историји математике забележено је у приватној преписци несумњивог математичког генија, Исака Њутна. У свом писму Олденбургу[8] [5] датованом 26. октобра 1676. године Њутн је описао геометријско-комбинаторну методу за налажење решења алгебарских једначина $f(x, y) = 0$ у облику (формалних) степених редова $y = y(x)$. Метода је много касније названа по свом проналазачу методом Њутновог полигона. Писмо је део преписке коју је Њутн преко Олденбурга водио са Лајбницом и Чирнхаузом[9]. Њутн разматра комбинаторне везе међу мономима $x^m y^n$ у f односно, са данашњег гледишта, односе одговарајућих тачака целобројне мреже $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$. У претходном писму, датованом 13. јуна, Њутн показује како решити једначину

$$y^3 + axy + a^2 y - x^3 - 2a^3 = 0$$

низом апроксимација

$$\begin{aligned} y &= a + p \\ p &= q - x/4 \\ q &= r + x^2/64a \\ r &= ... \\ s &= ... \end{aligned}$$

Олденбург тражи детаљнија објашњења, и у наредном писму Њутн објашњава да ако конструишемо полигоналну линију која је конвексни омотач одређених

[8] Henry Oldenburg, 1615–1677, научни секретар Лондонског краљевског друштва.

[9] Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646–1716; Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, 1651–1708. За нас је можда занимљиво да су обојица били Лужички Срби.

тачака у равни које одговарају датој једначини, можемо да решимо „словну” једначину

$$y^6 - 5xy^5 + \frac{1}{a}x^3y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

У Њутновом опису кључни су чланови y^6, x^2y^2, x^3 који се могу видети на наредном дијаграму. Приметимо да су x и y заменили места у односу на данас уобичајене конвенције: x је вертикално а y хоризонтално, као и да је Њутн тачке стављао у квадратиће, а не на пресечне тачке мреже, како то радимо данас.

Fig. 1

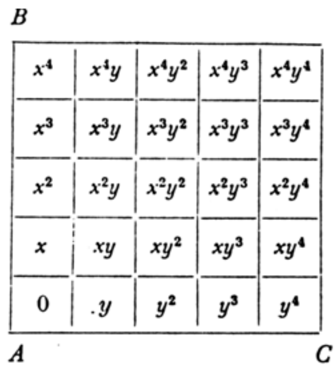
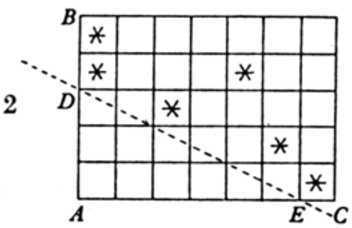


Fig. 2



Њутн у ствари сугерише да прва апроксимација решења односно почетни члан развоја решења $y = y(x)$ у (формални, јер се у његово време математичари нису бринули о конвергенцији редова: сви значајни редови ионако конвергирају) степени ред треба да садржи оне чланове чије се одговарајуће мрежне тачке налазе на рубу Њутновог полигона, како бисмо то данас рекли. Одличан приказ садржаја и коментар ових писама дат је у [6].

Њутнова метода је нажалост пала у заборав, све док је два века касније у свом раду [7] није поново открио француски математичар Виктор Пизо[10]. Развијајући теорију алгебарских функција и проучавајући сингуларитете алгебарских кривих, Пизо је увео степене редове са разломљеним, рационалним експонентима и у теореми која се данас назива Њутн-Пизоовом теоремом закључио да се свака грана алгебарске криве у околини сингуларне тачке може изразити таквим једним редом. Алгебарски гледано, поље Пизоових редова је директан лимес индуктивне фамилије пôља Лоранових редова $K_n \cong k((x))$ у којој је везујући хомоморфизам $K_m \longrightarrow K_n$ дат са $x \mapsto x^{n/m}$ када m дели n. У конструкцији тог решења односно гране одлучујућу улогу има Њутнов полигон.

[10] Victor Alexandre Puiseux, 1820–1883.

3. Епистемолошки корени Петровићеве методе

Веома је занимљиво питање како је Михаило Петровић као млад студент који је, кад се обрео у Паризу, имао 22 године а докторирао са 26 година, дошао на једну такву необичну и значајну идеју. Био је то свакако тренутак инспирације припремљен његовим радом у току четири године. Да ли је можда млади Петровић био упознат са методом Њутновог полигона? Одговор на ово питање се може наћи пажљивим читањем његове дисертације. Она се наравно базира на радовима његових математичких узора Поенкареа, Пикара и Пенлевеа, али се на више места у његовој дисертацији помињу и Брио и Буке. Драган Трифуновић је у [8] на једном месту сабрао све референце на литературу коју Михаило Петровић у свом докторском раду цитира. Има их само осам. Међу њима је само једна књига: уџбеник Брио и Букеа „Теорија елиптичких функција" [9]. О каквој књизи је реч? Два аутора Шарл Брио и Жан Клод Буке су своје познанство започели још у школи, да би касније студирали у École normale supérieure и докторирали на Faculté des sciences. Објавили су заједно велики број радова и књига, представљајући тако редак пример заједничког рада у XIX веку. У математици су остали запамћени по класификацији обичних диференцијалних једначина једног одређеног типа, који се данас зове једначина Брио–Буке. Књига о којој је реч представља уџбеник из у то доба веома значајне математичке теорије – теорије елиптичких функција. Михаило Петровић је свакако књигу веома озбиљно изучавао. Прелиставањем ове књиге, што је у веку интернета уз Пројекат Гутенберг данас постало доступно, у тачки 34 другог поглавља прве књиге (стр. 37–39) наилазимо управо на Њутнове полигоне. Истина, Брио и Буке не помињу Њутна, приписујући откриће ове методе Пизоу. Да ли је у питању француски национализам, или је Виктор Пизо заиста учинио независно поновно откриће методе, тешко је рећи. Свакако је млади Петровић у овој књизи нашао једну необичну комбинаторно-геометријску методу за налажење развоја решења алгебарских једначина у степене редове. Одатле до развоја аналогне методе за алгебарске диференцијалне једначине је само један корак. За тај корак је свакако било потребно Петровићево надахнуће, јер је од изласка књиге 1875. до Петровићеве дисертације 1894. протекло скоро двадесет година а да нико пре њега у тој изузетно активној математичкој средини није дошао на такву идеју.

4. О развоју Њутнових полиедара у XX веку и предлогу наставка Петровићевог рада

Петровићев докторат се састоји из два дела. У првом делу уводи свој полигон и примењује га на алгебарске (полиномијалне) обичне диференцијалне једначине облика

$$\sum f_{i,j}\left(x\right)y^{i}y'^{j}=0.$$

Петровић анализује понашање нула и полова решења ове једначине помоћу геометријских особина полигона који представља конвексни омотач скупа тачака (i,j) које одговарају свим члановима горње једначине, дајући заокружену целину у неколико теорема.

У другом делу своје тезе Петровић покушава да методу уопшти на алгебарске ОДЈ вишег реда, облика

$$\sum f_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\left(x\right)y^{i_1}y'^{i_2}\ldots y^{(k)^{i_k}}=0.$$

Конструкција коју нуди је аналогна: он уводи равни полигон одређен тачкама које узимају у обзир све експоненте $(i_1,\ldots,i_k)$. Међутим, овај полигон у ствари не може да представи све могућности комбинаторног распореда у овом вишедимензионалном случају. Петровић добија делимичне резултате, формулисане у неколико теорема, али ни сам није до краја задовољан урађеним. У вези са тим, постављају се два важна питања. Прво, зашто ни Петровић, ни нико од његових ученика у Србији никад нису покушали да наставе овај рад на задовољавајући начин. Делимичан одговор дат је на почетку овог прилога. Друго питање је нешто конкретније: да ли је Петровићев полигон у облику у ком га он примењује, уопште одговарајући за опис много сложенијег понашања у вишедимензионалном случају. Развој технике Њутновог полигона у двадесетом веку можда може да дâ одговор на ово питање. Као што је већ поменуто, комбинаторно-геометријска техника Њутнових полигона је више пута откривана и заборављана. У јеку Другог светског рата, чувени руски математичар Чеботарјов[11] написао је поводом тристоте годишњице Њутновог рођења прегледни чланак посвећен методи Њутновог полигона [10], у коме поред Њутновог помиње и Пизоов рад. Чудно је, ипак, да ни речју не помиње полигон Михаила Петровића. Очигледно, ни Чеботарјов није био свестан принципијелне везе између ове две комбинаторне методе. Даљи развој Њутновог полигона тече преносом „са деде на унука”. Један од најзначајнијих ученика Чеботарјова био је велики руски математичар Игор Шафаревич, који је имао

[11] Чеботарёв Николáй Григóрьевич, 1894–1947.

изузетан утицај на плејаду својих ученика из московске математичке школе шездесетих и седамдесетих година двадесетог века. Поменућу само двојицу: Јурија Мањина и Владимира Арнољда. Потоњи је у свом семинару 1970-тих са својим ученицима оживео методу Њутнових полигона и у серији радова довео њену примену до неслућених размера. Метода је пренета у више димензије као метода Њутнових полиедара и примењивана на широки спектар математичких проблема, од пребројавања решења алгебарских система једначина (Кушниренко [11], Бернштајн, Ховански [12]), до класификације сингуларитета и анализе брзо осцилујућих интеграла (Варченко, Гусеин-Заде, Арнољд [13]). Проучавајући класификацију сингуларитета равних кривих, а будући упознат са радовима школе Арнољда, и аутор је својевремено у свом докторату „Једнограни сингуларитети алгебарских многострукости и нераставливост у прстенима формалних степених редова” из 1985. користио методу Њутновог полигона за проучавање факторизације у прстену формалних степених редова и делимично је уопштио на вишедимензиони случај [14]. Подстицај за то је била једна неопрезна констатација Бернара Тесијеа у [15].

Користећи поменуту технику, било би веома занимљиво да се покуша допуна Петровићевих резултата о алгебарским ОДЈ базирајући се на вишедимензионалном аналогону његовог полигона, који се добија потпуно аналогно дводимензионалном случају. Можда би то дало бољу слику повезаности понашања нула и полова решења дате диференцијалне једначине са вишедимензионалним особинама одговарајућег Њутновог или Петровићевог полиедра, асоцираног са овом једначином. Надајмо се да ће до реализације овог плана убрзо доћи.

Библиографија

[1] Драган В. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд (1969).

[2] Михаило Петровић, *О нулама и бесконачностима интеграла алгебарских диференцијалних једначина*, У књизи Михаило Петровић: Сабрана дела. Књига 1. Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (1999), стр. 27–127.

[3] М. Томић, *Михаило Петровић и његов допринос у развоју математичких наука*, Ибид., стр. 9–21.

[4] Б. Станковић, *Аналитичка теорија диференцијалних једначина Михаила Петровића*, Ибид., стр. 367–378.

[5] I. Newton, *The correspondence of Isaac Newton*, Cambridge University Press, vol. 1 (1960), pp. 20–42, pp. 110–163.

[6] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves* Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart (1986).

[7] V. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XV (1850).

[8] Д. Трифуновић, *Литература. У књизи Михаило Петровић: Сабрана дела*, Књига 1. Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (1999), стр. 379–381.

[9] Ch. Briot, J. C. Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, Gauthier-Villars, Paris (1875).
[10] Н. Г. Чеботарёв, *Многоугольник Ньютона и его рольв современном развитии математики* (из сборника „Исаак Ньютон"). АН СССР (1943).
[11] А. Г. Кушниренко, *Многогранники Ньютона и теорема Безу*, Функц. анализ и его прил., т. 10, вып. 1 (1976), с. 82–83.
[12] А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона. Современные проблемы математики*, Итоги науки и техн. М.: ВИНИТИ, т. 22 (1983), с. 207–239.
[13] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. Н. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений (ОДО-2)*, Наука, Москва, (1984).
[14] A. Lipkovski, *Newton polyhedra and irreducibility*, Math. Z., 199 (1988) pp. 119–127.
[15] B. Teissier, *Polyèdre de Newton jacobien et équisingularité*, Seminar on Singularities (Paris, 1976/1977), Publ. Math. Univ. Paris VII, 7, Univ. Paris VII, Paris, (1980), pp. 193–221.

Aleksandar T. Lipkovski

A CONTEMPORARY VIEW OF MIHAILO PETROVIĆ'S DOCTORAL THESIS

S u m m a r y

Mihailo Petrović (1868–1943), the most prominent and influential Serbian mathematician, defended his doctoral thesis entitled "Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations differentielles algébriques" in Paris 1894, in front of the highly prominent defence committee: Hermite, Picard and Painlevé. Since then, much has been written about Petrovic himself, his thesis and other scientific achievements, and about the influence he had on Serbian mathematics, mathematicians and society in general. However, until this very day, there has been no proper analysis of the original combinatory geometrical method he used in the thesis. The purpose of this paper is to change this fact and to clarify the origins and the importance of Petrović's method, as well as to give some directions for continuation of his work, which has not been satisfactory even today.