СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

SERBIAN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS

SCIENTIFIC MEETINGS

Book CLXXXII

PRESIDENCY

Book 12

# MIHAILO PETROVIĆ ALAS

## REGARDING ONE HUNDRED AND FIFTY YEARS SCIENCE BIRTH

Scientific meeting with an international partake,
held at the Serbian Academy of Sciences and Arts
on October 2–3, 2018

BELGRADE 2019

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

НАУЧНИ СКУПОВИ

Књига CLXXXII

ПРЕДСЕДНИШТВО

Књига 12

# МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ АЛАС

## ПОВОДОМ СТО ПЕДЕСЕТ ГОДИНА ОД РОЂЕЊА

Научни скуп са међународним учешћем одржан
у Српској академији наука и уметности,
2–3. октобра 2018.

БЕОГРАД 2019

Програмски одбор:
Копредседници: *Жарко Мијајловић, Градимир Миловановић, Стеван Пилиповић*
Чланови:*Војислав Андрић, Зоран Каделбург, Миљан Кнежевић, Александар Липковски, Зоран Огњановић, Зоран Марковић, Миодраг Михаљевић*

Организациони одбор:
*Зоран Огњановић, Војислав Андрић, Миљан Кнежевић, Марија Шеган-Радоњић, Маја Новаковић, Јелена Катић, Небојша Икодиновић, Александра Делић, Марек Светлик*

Уредници
*академик Градимир Миловановић*
*академик Стеван Пилиповић*
*др Жарко Мијајловић*

Издавачи
*Српска академија наука и уметности*
Београд, Кнеза Михаила 35
*Математички факултет Универзитета у Београду*
Београд, Студентски трг 16
*Математички институт САНУ*
Београд, Кнеза Михаила 36
*Друштво математичара Србије*
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

Дизајн корица
*Драгана Лацмановић-Лекић*

Технички уредници
*Александра Делић*
*Миљан Кнежевић*
*Никола Стевановић*

Лектура и коректура
*Весна Шубић*

Штампа
Colorgrafx, Београд

Тираж
600 примерака

Подршка Министарства просвете, науке и технолошког развоја

ISBN: 978-86-7025-825-9
ISBN: 978-86-7589-136-9

# Садржај

# ТЕОРИЈА АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

СИНИША ЦРВЕНКОВИЋ[*]

А п с т р а к т. – Михаило Петровић је предавао петнаест математичких предмета у својој каријери професора универзитета. У богатој литератури о животу и раду овог нашег великана најмање је било речи о алгебарским једначинама. Математички факултет у Београду и Департман за математику и информатику Природно-математичког факултета у Новом Саду баштине два текста предавања Михаила Петровића о алгебарским једначинама. У нашем раду биће речи о овим текстовима који представљају прави бисер математичке литературе.

*Кључне речи*: алгебарска једначина, кореновање

*Everything about him was old except his eyes and they were the same color as the sea and were cheerful and undefeated.*
Ernest Hemingway, *Old man and the sea*

## 1. Увод

Математичари проводе свој живот окружени књигама. Математичке књиге су збирке идеја и мисли из прошлости и будућности. Математичар може препознати своју књигу затворених очију. Непосвећенима није дозвољено узимати у руке књиге математичара. Назовимо ово *аксиомама Теорије књига.*

На полици успомена наше младости крије се мала жута књига. На корицама пише *Михаило Петровић,човек, филозоф, математичар*. Издавач је био *Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије, Београд 1968*. Књига је штампана у оквиру чувене *жуте серије* чији је назив Математичка библиотека. Прочитали смо књигу о Михаилу Петровићу за један дан.

[*] Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, и-мејл: sinisa.crvenkovic@dmi.uns.ac.rs

Са нестрпљењем смо чекали излазак из штампе нове књиге жуте серије. Истина, добар део научних радова нисмо разумели. Главни уредник Математичке библиотеке био је Драгослав Митриновић, чувени професор Електротехничког факултета у Београду. Професор Митриновић је био један од ученика Михаила Петровића званог Мика Алас.

У малој жутој књизи постоји фотографија Мике Аласа. На њој је бркати чикица, живахних очију, који као да никад није био млад. Бар се то нама средњошколцима тако чинило. Диплома *Михаило Петровић Алас* додељивала се на крају средње школе за успехе из математике.

Онда је на нашим студијама Михаило Петровић потонуо у заборав. Можда смо чули неколико речи о њему у оквиру курса Теорије диференцијалних једначина. Мало људи је знало да постоје текстови из Теорије алгебарских једначина писаних по предавањима Михаила Петровића. Каква штета. Уместо да смо учили да решавамо алгебарске једначине из Петровићевих предавања, ми смо хитали у модерну алгебру. У овом тексту покушавамо донекле да исправимо ову неправду. Текст означен италиком у овом раду преузет је дословце из књиге Петровићевих предавања.

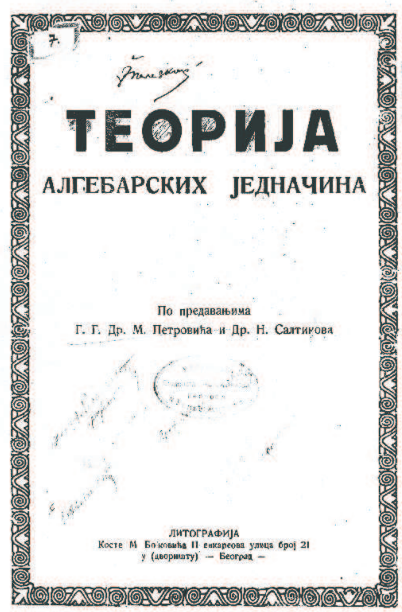
Петровићева предавања о једначинама су старог кова, као што је, на пример, књига William-a Burnside-a и Arthur-a Panton-a, Theory of Equations, из 1881. године. Можемо рећи да је књига Leonard-a Dickson-a, First Course in the Theory of Equations, John Wiley & Sons 1922, слична Петровићевим предавањима, али далеко слабија. У овим књигама се не спомиње Галоа.

## 2. О текстовима

Математички факултет у Београду баштини два текста о алгебарским једначинама. Прва скрипта, под насловом *Теорија алгебарских једначина*, писана су руком. Приметно је да се у излагању градива користе два различита рукописа. Ниједан не личи на Петровићев рукопис. Претпостављам да су то белешке студената који су слушали Петровићева предавања из Теорије алгебарских једначина. Други текст је дат у виду књиге и носи наслов *Теорија алгебарских једначина*.

То је књига о којој ћемо причати у овом раду. Штампана је 1927. године и права је математичка посластица, која на природан начин спаја алгебру и анализу.

Добар део формула у другој књизи писан је руком. Као извори, у излагању градива, коришћена су дела страних аутора Abel-a, Wanstel-a, Laurent-a, Comberousse-a, Camberome-a и српског математичара Димитрија Нешића. Старим језиком тече прича о алгебарским једначинама, као река. Петровићева предавања допуњују и далеко превазилазе књигу Димитрија Нешића *Теорија алгебарских једначина*, из 1883. године.




**Слика 1.** Насловна страна

Предавање о алгебарским једначинама почиње дефиницијом:

*Свака алгебарска једначина са једном непознатом количином, може се увек писати у облику*

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots A_{m-1}x + A_m = 0. \tag{1}$$

Израз *количина* преузет је од Нешића. Даље се каже:

*Ако су коефицијенти дати у симболима (словима) онда се та једначина назива општом једначином; ако су пак ти коефицијенти бројеви, онда се таква једначина назива бројном једначином.*

Тешко је поверовати да је прва, руком писана, књига о алгебарским једначинама Петровићева. За Абела се каже да је *шведски математичар.*

У другој књизи, на страни 3 стоји:

*Општу једначину, чији је степен виши од четвртог степена је немогуће решити, као што су показали Abel и пре свега али недовољно тачно, Wanstel.*

Петровић и Салтиков се позивају на Abelove Ouvres complete, Camberousse-ov Cours de mathematique и Wanstel-ov рад у Journale de l'ecole Polytechnique.

Готово је сигурно да је име Wanstel, које је наведено као референца, у ствари погрешно написано име Wantzel. Реч је о познатом француском математичару чије име је Pierre Wantzel (1814–1848). То је човек који је решио *Проблем удвајања коцке* и *Проблем трисекције угла.* Наиме, као што знамо, Wantzel је показао да није могуће извршити тражене конструкције шестаром и равналом.

Године 1927. се добро знало ко је Évariste Galois. Абел је показао да за једначине степена $n \geqslant 5$ не постоји формула која даје све корене, као што је, на пример, формула за корене квадратне једначине. Овај Абелов резултат не значи да свака посебна једначина нема своју формулу за корене. Млађахни Галоа је *урадио* много више. Наиме,

*Алгебарска једначина је решива кореновањем ако и само ако је одговарајућа група Галоа решива.*

Évariste Galois ступа 1870. године на велику математичку сцену књигом Camille Jordan-a, *Traite des substitutions et des equations algebrique.* Издавач је био Gautier-Villars. Петровић је ову књигу морао имати у рукама. Одлучио се, с правом, да студентима предаје алгебарске једначине елементарним методама. У Петровићевим предавањима Галоа се не спомиње.

Знаменити Florian Cajori, у својој књизи *The Modern Theory of Equations*, New York, London, 1904. године уводи у причу групе пермутација корена у решавању алгебарских једначина, како је то радио Галоа односно Жордан. Edgar Dehn у књизи *Algebraic Equations an introduction to the theories of Lagrange and Galois*, Columbia University 1930, идући стопама Лагранжа, Галое и Жордана, излаже своје виђење теорије једначина. По многим ауторима, књига B. L. van der Waerden-a, *Moderne Algebra*, штампана 1930. године у Берлину, представља основу онога што данас називамо *Класична алгебра.* Van der Waerden је био студент велике математичарке Emmy Noether. Књижица Emil-a Artin-a, *Galois Theory*, штампана на Америчком универзитету Notre Dame, 1942. године, наравно послератним издањима, доводи до тога да Теорија Галоа постане саставни део математичких студија. Бурбакисти крећу у свој победоносни поход 1935. године. Алгебарске једначине постају школски део нове самосталне математичке дисциплине коју зовемо Алгебра.

## 3. Основна теорема алгебре

На страни 3 књиге предавања, под насловом *Деловни принцип*, се каже

*Најглавнији принцип у теорији алгебарских једначина је т.зв. D'Alambert-ова теорема. Она гласи: Свака алгебарска једначина има најмање један реалан или имагинаран корен.*

Jean le Rond d'Alambert је 1746. године, користећи технику анализе, покушао да докаже овај *принцип.* То се данас назива *Основна теорема алгебре.*

Практично од 1746. године настаје права лавина доказа ове теореме у покушају да се она докаже алгебарски.

Велики Гаус се доста негативно изразио о доказима Основне теореме алгебре, које су дали d'Alambert и Euler. Сам Гаус је дао неких пет доказа Основне теореме алгебре. Први доказ дао је у својој чувеној докторској дисертацији коју је, као што знамо, насловио *Disquisitiones Arithmeticae.* У савременим уџбеницима алгебре наводи се да је Гаус први доказао ову теорему. Међутим, Гаус је подразумевао, као интуитивно јасно, да свака непрекидна функција, која мења знак на неком интервалу, има бар једну нулу на том интервалу. Интересантно је да је ово први доказао чешки математичар Bernhard Bolzano 1817. године.

У наставку текста предавања о једначинама, Петровића и Салтикова, аутори показују основне ставове о полиномима како се то и данас предаје. Коефицијенти полинома су реални или комплексни.

Руком писани текст садржи симпатичан назив за конјуговано комплексне корене полинома. Они се називају *уображени*, што је преузето из Нешићеве књиге.

Да би доказали да свака алгебарска једначина са реалним коефицијентима, која има имагинаран корен, има и њему конјугован имагинаран корен, аутори књиге предавања развијају полином у Тејлоров ред. Ово је, наравно, непотребно јер се тврђење лако доказује користећи особине операције конјуговања.

Међутим, у наставку приче, методички сасвим оправдано, се каже

*Треба добро имати на уму да ова особина имагинарних корена важи само ако су сви коефицијенти дате једначине реални.*

**Пример 1.** *Једначина са имагинарним коефицијентима*

$$x^2 - ix - 1 - i = 0.$$

чији су корени $x = 1 + i$ и $x = -i$ неће имати корен $x = 1 - i$.

Јасно, грешка у преписивању с табле. Реч је о једначини

$$x^2 - x + 1 - i = 0.$$

У наставку предавања, методички поступно презентираним текстом, доказују се Вијетове формуле које дају везу корена и коефицијената једначина произвољног степена. Добија се $n$ једначина са $n$ непознатих $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, где су $\alpha_i$ корени полазне једначине. Затим се каже

*Потребно је нагласити овде да нас решавање тих једначина са n непознатих количина $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ не довађају до каквих нових резултата, јер кад би из тих једначина елиминисали $n-1$ непознатих $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ дошли би до једначине $F(\alpha_1) = 0$, т.ј. до првобитне једначине од које смо пошли, у којој је слово x смењено са $\alpha_1$.*

Аутори констатују да се ради о *симетричним функцијама корена* и налазе збир квадрата корена који је изражен коефицијентима једначине. Не ширећи даље причу о симетричним функцијама корена, у тексту се каже

*Ко жели више да зна о симетричним функцијама нека види у доле споменутим делима.*

Ипак, симетричне функције корена обрађене су у тексту касније. Даље се задају специјалне једначине са унапред датим везама корена. На пример

*Какав услов треба да задовољавају коефицијенти дате једначине*

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

*па да њени корени буду чланови једне геометријске прогресије, и у том случају дату једначину решити.*

У делу који носи наслов *О заједничким коренима двеју алгебарских једначина* тражи се највећи заједнички делитељ два полинома. Корени овог полинома представљају решења датог система једначина. Практично, даје се Еуклидов алгоритам за налажење највећег заједничког делитеља два полинома. Природно, одмах затим, следи одређивање вишеструкости корена. Доказује се да

*Један вишеструки корен $l$-тог реда једначине $F(x) = 0$ је вишеструки корен $l-1$ реда изводне једначине $F'(x) = 0$.*

Показује се да важи

**Теорема 1.** *Ако је $\alpha$ један корен $l$-тог реда једначине $F(x) = 0$ тада је он у исто време корен свих једначина*

$$F'(x) = 0,\ F''(x) = 0, ..., F^{(l-1)}(x) = 0.$$

Приказујемо доказ ове теореме због његове елеганције. Нека је

$$f(x) = A_0(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k}$$

Групишемо све корене првог реда, другог реда, ..., $k$-тог реда

$$\begin{aligned}
X_1 &= (x-\alpha_{11})(x-\alpha_{21})\cdots(x-\alpha_{r_1 1})\\
X_2 &= (x-\alpha_{12})(x-\alpha_{22})\cdots(x-\alpha_{r_2 2})\\
&\dots\\
X_k &= (x-\alpha_{1k})(x-\alpha_{2k})\cdots(x-\alpha_{r_k k})
\end{aligned}$$

Дакле,

$$f(x) = A_0X_1X_2^2X_3^3\cdots X_k^k.$$

Ако нађемо све $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, решили смо једначину. У тексту је дат пример за $k = 4$.

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$

$NZD(f(x), f'(x))$ је

$$D(x) = X_2 X_3^2 X_4^3.$$

Потражимо $NZD(D(x), D'(x))$ и добијамо $D_1(x) = X_3 X_4^2$. Даље је

$$NZD(D_1(x), D_1'(x)) = D_2(x) = X_4.$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{D(x)} &= Q(x) = X_1 X_2 X_3 X_4 \\
\frac{D(x)}{D_1(x)} &= Q_1(x) = X_2 X_3 X_4 \\
\frac{D_1(x)}{D_2(x)} &= Q_2(x) = X_3 X_4 \\
D_2(x) &= X_4.
\end{aligned}$$

Следи

$$X_1 = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}, \;\; X_2 = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}, \;\; X_3 = \frac{Q_2(x)}{D_2(x)}, \;\; X_4 = D_2(x).$$

Јасно је како се овај поступак може уопштити. Наравно, констатује се да се ово правило може применити на израчунавање вишеструкости корена само онда кад нам је дотични корен познат.

На страни 40 Петровићевих предавања, имамо примену хомогених функција у налажењу вишеструких корена. Наиме, ако је дата једначина

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

замени се $x$ са $\frac{x}{y}$ и све се помножи са $y^n$. Добија се једначина

$$y^n F(\frac{x}{y}) = \varphi(x, y) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \cdots + A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n = 0.$$

Јасно, $\varphi(x, 1) = F(x)$. Ојлеров идентитет за хомогене функције гласи

$$x\varphi_x'(x, y) + y\varphi_y'(x, y) = n\varphi(x, y).$$

Ако је $F(a) = 0$ и $F'(\alpha) = 0$, имамо

$$\varphi(\alpha, 1) = 0 \text{ и } \varphi'_x(\alpha, 1) = 0.$$

Добија се $\varphi'_y(\alpha, 1) = 0$, па је сваки двоструки корен једначине $F(x) = 0$ заједнички корен једначина

$$\varphi'_x(x, y) = 0 \text{ и } \varphi'_y(x, y) = 0,$$

за $y = 1$. Даље се може, на сличан начин, наставити поступак, у случају да једначина има корен већег реда. Опет је и ова метода илустрована многобројним примерима.

У делу о трансформацијама једначина даје се низ интересантних примера. На страни 58, у шестом задатку, се каже

**Пример 2.** *Образовати једначину чији су корени квадрати корена дате једначине*

Смена $y = x^2$, односно $x = \sqrt{y}$ даје једначину $F(\sqrt{y}) = 0$. Дакле,

$$F(\sqrt{y}) = A_n + A_{n-1}\sqrt{y} + A_{n-2}y + A_{n-3}y\sqrt{y} + \cdots = 0.$$

Груписањем чланова који садрже $\sqrt{y}$ добијамо

$$(A_n + A_{n-2}y + A_{n-4}y^2 + \cdots) + \sqrt{y}(A_{n-1} + A_{n-3}y + A_{n-5}y^2 + \cdots) = 0$$

или

$$\sqrt{y}(A_{n-1} + A_{n-3}y + A_{n-5}y^2 + \cdots) = -(A_n + A_{n-2}y + A_{n-4}y^2 + \cdots).$$

Квадрирањем имамо

$$y(A_{n-1} + A_{n-3}y + A_{n-5}y^2 + \cdots)^2 = (A_n + A_{n-2}y + A_{n-4}y^2 + \cdots)^2$$

и враћањем $y = x^2$ у игру, добијамо тражену једначину по $x$.

Погледајмо задатак 16 на страни 62.

**Пример 3.** *Ако су $\alpha_r, r = 1, 2, 3, \ldots, n$ корени једначине $n$-тог степена $f(x) = 0$, израчунати изразе*

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_r} \quad и \quad \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(x - \alpha_r)^2}.$$

*Из тог доказати дакле да кад су сви корени једначине $f(x) = 0$ реални, једначина*

$$F(x) = f(x)f''(x) - (f'(x))^2 = 0$$

*има све корене имагинарне.*

Нека су сви корени различити. Издвајамо овај пример због елеганције решења датог у тексту.

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Логаритмовањем добијамо

$$log f(x) = log(x - \alpha_1) + log(x - \alpha_2) + \cdots + log(x - \alpha_n),$$

наравно, под условом да је све дефинисано. Диференцирањем по $x$ добијамо

$$\frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x - \alpha_n} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Поновним диференцирањем имамо

$$-\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(x - \alpha_r)^2} = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{f^2(x)}.$$

Лева страна овог идентитета не може бити нула ни за једно реално $x$, па једначина

$$f(x)f''(x) - (f'(x))^2 = 0$$

нема реалне корене.

На страни 64, друге књиге о једначинама, почиње прича о симетричним функцијама. Дата са интересантним примерима симетричних функција, ова материја може и данас, деведесет година касније, бити део градива савремених уџбеника алгебре.

## 4. Решавање кубне једначине

Решавање *општих алгебарских једначина* почиње на 78. страни текста. Одмах се констатује да

*Решавање општих алгебарских једначина виших од четвртог степена је немогуће, као што је доказао Абел. Једначине виших од четвртог степена могу се само приближно решити само ако су њихови коефицијенти дати у бројевима, а ова решења ћемо доцније видети.*

Старински језик је део шарма овог текста. Постепено се долази до решења кубне једначине.

**Пример 4.**

Полазећи од једначине

$$x^3 - A = 0,$$

и стављајући да је

$$A = re^{i\alpha} = re^{(\alpha+2k\pi)i} = r[\cos(\alpha + 2k\pi) + i\sin(\alpha + 2k\pi)]$$

где је $r = |A|$, добија се

$$x = \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{r}e^{\frac{\alpha+2k\pi}{3}i} = \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha + 2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\alpha + 2k\pi}{3})].$$

*Ако сад дајемо количини $k$ вредност 0,1,2 добијамо три различите вредности за $x$ и то*

$$\begin{aligned} x_1 =& \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha}{3}) + i\sin(\frac{\alpha}{3})] \\ x_2 =& \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha + 2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\alpha + 2\pi}{3})] \\ x_3 =& \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha + 4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\alpha + 4\pi}{3})]. \end{aligned}$$

*Дамо ли ми количини $k$ још друге вредности, вредности за $x$ ће се увек поклапати са једним од трију горе наведених израза.*

Даље се доказује да, ако је $\alpha$ један од три наведена корена а

$$\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}),$$

онда су $\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha$ корени полазне једначине.

Прелазећи на решавање *опште једначине*, елиминацијом квадратног члана, долази се до еквивалентне једначине

$$x^3 + px + q = 0.$$

Поступак налажења корена исти је као код Кардана, односно Тартаље, па се каже

*Ова нам формула представља општи облик решења једначине трећег степена; њу је први нашао Tartaglia, и ако се зове Cardan-ова формула.*

Двадесет година пре Тартаље, Scipione del Ferro, професор математике у Болоњи, је 1515. године решио једначину облика

$$x^3 + px = q.$$

Тартаља је исти облик једначине решио 1535. године уочи математичког двобоја са учеником Шипиона дел Фера. Врло је вероватно да је Тартаља знао да реши и једначину облика

$$x^3 + px^2 = q.$$

Све остало је решио Girolamo Cardano у својој књизи *Ars Magna* из 1545. године. Зато се формула за корене једначине трећег степена зове *Карданова*. Пребацивање $q$ на леву страну знака једнакости за све њих је била права тешкоћа. Знак $=$ је увео енглески математичар Robert Recorde 1557. године, јер га је подсећао на паралелне дужи.

Преносимо решење кубне једначине из Петровићевих предавања. Као што је познато, једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

се решава тако што уведемо смену $x = u + v$. Враћањем $x$ у горњу једначину добијамо следеће везе за $u$ и $v$

$$u^3v^3 = -(\frac{p}{3})$$
$$u^3 + v^3 = -q.$$

Решавањем овог система по $u^3$ и $v^3$ добијамо да је

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

где је

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Означимо са $A$ једну вредност кубног корена од $u$ и са $B$ једну вредност кубног корена од $v$. Добијамо по три вредности за $u$ и $v$

$$A,\ \varepsilon A,\ \varepsilon^2 A$$
$$B,\ \varepsilon B,\ \varepsilon^2 B.$$

Лако се показује да су корени полазне једначине

$$x_1 = A + B$$
$$x_2 = \varepsilon A + \varepsilon^2 B$$
$$x_3 = \varepsilon^2 A + \varepsilon B,$$

односно

$$x_1 = A + B$$
$$x_2 = -\frac{A+B}{2} + i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}$$
$$x_3 = -\frac{A+B}{2} - i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}$$

где је $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, кубни корен из јединице.

У зависности од тога коју вредност има дискриминанта

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

унапред знамо какви су корени једначине. Ако је $D > 0$, онда је $\sqrt{D}$ реалан број, па узимајући за $A$ и $B$ реалне вредности, добијамо, у општем случају, један реалан и два комплексна корена.

Занимљиво је да се у тексту књиге предавања наводи Hudde као аутор овог метода решавања кубне једначине. Вероватно се мисли на холандског математичара Johannes van Waveren Hudde-а, градоначелника Амстердама од 1672. до 1703. године. На страни 84 разматра се случај кад је $D < 0$, који аутори називају несводљив случај (*casus irreducibile*). У тексту се каже

*Но пошто су*

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D_1}} \ \ u \ \ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D_1}},$$

*где је $D = -D_1$ тако да је $D_1 > 0$, две, имагинарне конјуговане величине, то ако једна од вредности $u$ има облик $A = a + ib$, једна ће вредност од $v$ имати облик $B = a - ib$. Тада ћемо имати вредности за $u$*

$$a + ib, \ \ \varepsilon(a + ib), \ \ \varepsilon^2(a + ib)$$

*а за $v$*

$$a - ib, \ \ \varepsilon(a - ib), \ \ \varepsilon^2(a - ib).$$

*Корени ће бити дати изразима*

$$x_1 = (a+ib) + (a-ib) = 2a$$
$$x_2 = \varepsilon(a+ib) + \varepsilon^2(a-ib) = a(\varepsilon+\varepsilon^2) + ib(\varepsilon-\varepsilon^2)$$
$$x_3 = \varepsilon^2(a+ib) + \varepsilon(a-ib) = a(\varepsilon+\varepsilon^2) - ib(\varepsilon-\varepsilon^2)$$

*Како је пак*

$$\varepsilon+\varepsilon^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -1$$
$$\varepsilon-\varepsilon^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$$

*то су сва три корена*

$$x_1 = 2a$$
$$x_2 = -a - b\sqrt{3}$$
$$x_3 = -a + b\sqrt{3}.$$

Проблем је наћи $a$ и $b$. Ово се не може урадити кореновањем. Петровић и Салтиков овако образлажу *casus irreducibilis*:

$$x_1 = 2a, \quad x_2 = -a - b\sqrt{3}, \quad x_3 = -a + b\sqrt{3},$$

*знамо да постоје следеће везе*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \;\; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p, \;\; x_1x_2x_3 = -q.$$

*Ако у њима сменимо горње вредности, прва ће веза бити индентично задовољена, а из друге две добијамо*

$$a^2 + b^2 = -\frac{p}{3}, \;\; 2a^3 - 6ab^2 = -q.$$

*Елиминишемо ли из ове две једначине* $b^2$*, добијамо*

$$2a^3 - 6a\Big(-\frac{p}{3} - a^2\Big) = -q,$$

*или*

$$a^3 + \frac{p}{4}a + \frac{q}{8} = 0.$$

*У овој једначини је такође*

$$D_1 = \left(\frac{p}{4} \cdot \frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2 \cdot 8}\right)^2 < 0$$

*јер је* $D_1 = \frac{1}{64}D$, *а* $D < 0$ *по предпоставци.*

*Ова једначина има према томе три реална и различита корена, и решавање те једначине нам задаје исто толико тешкоћа као и решавање првобитне једначине.*

Наравно, све ово само значи да се тим путем не може доћи до корена. Можда бисмо неким другим алгебарским сменама дошли до израза за корене.

У данашњим уџбеницима алгебре доказује се следеће тврђење:

*Casus irreducibilis.* Ако је $f(x) = x^3 + px + q \in R[x]$ несводљив полином који има различите корене, онда било која коренска екстензија $K|Q(p,q)$ која садржи поље разлагања полинома $f(x)$ није реална; то значи $K \nsubseteq R$. Напоменимо да је управо *Casus Irreducibilis* био мотивација за увођење комплексних бројева у математику.

У наставку аутори дају решење кубне једначине $x^3 + px + q = 0$ у тригонометријском облику. Користи се познати тригонометријски идентитет

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - \cos\frac{\varphi}{3}$$
$$\cos\varphi = \cos\Big(\varphi + 2k\pi\Big),$$

па следи

$$4\cos^3\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) - \cos\varphi = 0.$$

Ако уведемо смену

$$\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} = \frac{x}{\rho},$$

добијамо једначину

$$4\frac{x^3}{\rho^3} - \frac{x}{\rho} - \cos\varphi = 0.$$

Ова једначина има корене

$$x = \rho\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right), \;\; k = 0, 1, 2.$$

Полазна једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

претвара се у горњу, *тригонометријску једначину*, сменом

$$-\frac{3\rho^2}{4} = p, \quad \frac{-\rho^3 \cos\varphi}{4} = q,$$

па је

$$\rho = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \ \ \cos\varphi = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Корени су дати изразом

$$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right), \ \ k = 0, 1, 2,$$

под условом да је $\cos\varphi \leqslant 1$, односно

$$\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}} \leqslant 1$$

или

$$\frac{q}{2} \leqslant \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Последња неједнакост важи ако и само ако је

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leqslant 0.$$

Као што знамо, ово је услов да корени буду реални. Свакако мора бити $p \leqslant 0$.

На страни 90, у задатку 2, се каже

**Пример 5.** *Разделити половину кугле у два једнака дела једном равни паралелној бази.*

Тражи се висина $x$ одсечка сфере чија је запремина четвртина запремине сфере. Дакле,

$$\frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$$

што је еквивалентно једначини

$$x^3 - 3Rx^2 + R^3 = 0.$$

Смена $x = Ry$ даје

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0.$$

Због квадратног члана уводимо смену, $y = z + 1$ и добијамо

$$z^3 - 3z - 1 = 0$$
$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$$

Решавамо тригонометријски

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{27}{27}} = 1, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2\rho} = \frac{1}{2}.$$

Дакле,

$$\varphi = 60^\circ, \ \ \frac{\varphi}{3} = 20^\circ$$

и корени су

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\cos 20^\circ \\ z_2 &= 2\cos(20^\circ + 120^\circ) = 2\cos 140^\circ \\ z_3 &= 2\cos(20^\circ + 240^\circ) = 2\cos 260^\circ \end{aligned}$$

односно

$$z_1 = 2\cos 20^\circ, z_2 = -\cos 40^\circ, z_3 = 2\cos 100^\circ.$$

$z_2$ и $z_3$ су негативни па је $x = 2R\cos 20^\circ$. Лепо и корисно.

## 5. Решавање једначине четвртог степена

На 92. страни текста се каже

*Начин решавања једначине 4-тог степена нашао је Euler, и он је сличан начину по којем смо решавали једначину трећег степена.*

Ипак, *начин решавања* једначине четвртог степена први је нашао Ludovico Ferrari, Карданов ученик, а не Ојлер. Кардано је Фераријево решење презентирао у књизи *Ars Magna* 1545. године. У руком писаном тексту *Теорија једначина*, као аутор решења једначине четвртог степена наводи се Тартаља.

Нема доказа да је Тартаља знао да реши било који нетривијалан облик једначине четвртог степена. Уосталом, Тартаља је одбио да се једначине уврсте у проблеме двобоја са Фераријем у Милану 1548. године.

Ако погледамо књигу Кардановог савременика Rafael-а Bombelli-ja *L'Algebra*, Bologna, 1572, видимо да он нема лепо мишљење о Тартаљи.

У новије време Тартаљино место у историји математике одредио је један од водећих научника данашњице Sir Roger Penrose у књизи *Shadows of The Mind* из 1995. године.

Једначине четвртог степена обрађене су у другој књизи на веома елегантан начин. Ваља рећи да је овај приступ решавању једначина четвртог степена користио и Димитрије Нешић. Нешић, као изворну литературу за своју књигу, наводи немачке ауторе и практично нема пресека са литературом коју наводе Петровић и Салтиков.

Презентирани начин решавања једначине четвртог степена, у Петровићевим предавањима, природно се надовезује на Карданов метод решавања једначине трећег степена. Наиме, уводи се смена

$$x = u + v + t$$

према томе,

$$x^2 = u^2 + v^2 + t^2 + 2(uv + vt + tu)$$

или

$$x^2 - (u^2 + v^2 + t^2) = 2(uv + vt + tu)$$

Квадрирањем добијамо

$$x^4 - 2x^2(u^2 + v^2 + t^2) + (u^2 + v^2 + t^2)^2 = 4(u^2v^2 + v^2t^2 + t^2u^2) + 8uvt(u + v + t).$$

Враћањем $x = u + v + t$, добијамо

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + t^2)x^2 - 8uvtx + [(u^2 + v^2 + t^2)^2 - 4(u^2v^2 + v^2t^2 + t^2u^2)] = 0.$$

Ако је полазна једначина, која се добија после елиминације кубног члана,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

онда, изједначавањем са коефицијентима претходне једначине добијамо

$$\begin{aligned} -(u^2 + v^2 + t^2) &= \frac{p}{2} \\ u^2v^2 + v^2t^2 + t^2u^2 &= \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4} \\ -u^2v^2t^2 &= -\frac{q^2}{64}. \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо кубне једначине по $u^2, v^2, t^2$.

Интересантно је да Ферари није овако решавао једначину четвртог степена. Он је сводио једначину на једнакост два квадрата квадратних тринома и одатле добијао решења кореновањем леве и десне стране идентитета. Рецимо и то да се данас у уџбеницима алгебре, поред Феraријеве методе, користи и Декартова метода решавања *quartic*-а. Наиме, Декарт, једноставно, полином четвртог степена раставља на производ два квадратна тринома и, методом једнаких коефицијената, добија две квадратне једначине.

## 6. Општа једначина $n$-тог степена

У наставку текста, аутори крећу у решавање специјалних једначина произвољног степена. Полази се од *Биномне једначине*

$$x^n - A = 0$$

и, природно, сводећи ову једначину на

$$y^n - 1 = 0$$

и њене корене

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 1\\
\varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\\
&\vdots\\
\varepsilon_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

аутори текста добијају корене полазне једначине

$$x_r = \varepsilon_r\sqrt[n]{A}, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Даље се, аналогно, даје решење случаја кад је $A$ комплексан број.

На страни 99 посматра се класа једначина облика

$$A_0x^{rn} + A_1x^{(r-1)n} + \cdots + A_{r-1}x^n + A_r = 0,$$

чије решење се тражи сменом

$$y = x^n.$$

Новодобијена једначина

$$A_0y^r + A_1y^{r-1} + \cdots + A_{r-1}y + A_r = 0,$$

разматра се за $r \leqslant 5$.

Следе примери.

**Пример 6.**

$$x^{2n} - 2ax^n \cos\alpha + a^2 = 0,$$

где је *a реална количина*. Јасно, смена $y = x^n$ даје квадратну једначину

$$y^2 - 2ay\cos\alpha + a^2 = 0,$$

чији су корени

$$y_1 = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ и } y_2 = a(\cos\alpha - i\sin\alpha).$$

Остало је примена Моаврове формуле.

Други одељак се завршава реципрочним једначинама. То су једначине које имају особину да, ако је $\alpha$ један корен дате једначине, онда је $\frac{1}{\alpha}$ такође корен те једначине. Не рачунајући случајеве кад су корени 1 или $-1$, добијамо једначине парног степена.

**Пример 7.**

У тексту се реципрочна једначина облика

$$A_0x^{2n} + A_1x^{2n-1} + \cdots + A_nx^n + \cdots + A_{2n-1}x + A_{2n} = 0,$$

решава тако што се уводи смена

$$z = x + \frac{1}{x}$$

подели се лева и десна страна са $x^n$ и добија једначина облика

$$B_0\Big(x^n + \frac{1}{x^n}\Big) + B_1\Big(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\Big) + \cdots + B_{n-1}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + B_n = 0.$$

Очигледно, треба $\left(x^i + \frac{1}{x^i}\right)$ изразити помоћу $z$. Користи се идентитет

$$\Big(x^r + \frac{1}{x^r}\Big)\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} + x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}},$$

односно

$$x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} = z\Big(x^r + \frac{1}{x^r}\Big) - \Big(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\Big).$$

Тако је

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2} &= \Big(x+\frac{1}{x}\Big)z-\Big(x^0+\frac{1}{x^0}\Big)=z^2-2\\ x^3+\frac{1}{x^3} &= \Big(x^2+\frac{1}{x^2}\Big)z-\Big(x+\frac{1}{x}\Big)=z^3-3z\\ x^4+\frac{1}{x^4} &= \Big(x^3+\frac{1}{x^3}\Big)z-\Big(x^2+\frac{1}{x^2}\Big)=z^4-4z^2+2. \end{aligned}$$

Видимо да је $x^n+\frac{1}{x^n}$ полином по $z$ $n$-тог степена. Поглавље се завршава свођењем једначина

$$x^{2n}-1=0$$

и

$$x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x^2+x+1=0$$

на једначине $n$-тог степена.

## 7. Нумеричко решавање једначина

Трећи одељак носи назив *Решавање бројних једначина.* Данас кажемо, *бројевних.* Имајући у виду да је сваки реалан полином непрекидна функција, уколико постоје две вредности тог полинома које су различитог знака, полином има реалну нулу. Број реалних нула, у интервалу у коме полином мења знак, је непаран. У тексту се аутори једноставно позивају на слику. Такође, у доказима се користи знак $\infty$ као бесконачно велика вредност и често се њиме множи, дели и сабира. На пример, на страни 114 као правило III наводи се следеће, под условом да је водећи коефицијент позитиван.

*Ако је задњи коефицијент једне алгебарске једначине негативан, она има најмање један позитиван корен. Јер ако уврстимо у дату једначину $F(x)=0$ уместо $x$ – а $0$ и $\infty$, то ће она имати знаке*

$$\begin{array}{cc} F(0) & F(\infty)\\ - & + \end{array}$$

*Дакле, између $0$ и $\infty$ мора се налазити најмање један корен.*

Јасно је да водећи моном најбрже расте, па аутори одмах закључују да је $F(\infty)>0$.

У овом одељку Петровић је код куће и градиво је пуно лепих примера. Прво се одређују границе корена. Прва метода одређивања границе реалних корена припада MacLaurin-у. Дакле, под условом да је водећи коефицијент полинома позитиван, имамо

*Горњу границу позитивних корена једне алгебарске једначине добијамо ако јединици додамо апсолутну вредност највећег негативног коефицијента једначине, подељеног са коефицијентом највишег степена од $x$.*

Следе Њутнова метода и метода груписања чланова.

На страни 119 се прелази на одређивање рационалних корена.

*Ако једначина садржи ирационалне коефицијенте, ми ћемо место њих оставити њихове приближне вредности изражене рационалним бројевима и на тај начин ирационалне коефицијенте претворити у рационалне.*

Одмах затим прелази се, природно, на једначине са целобројним коефицијентима. Поред познатог критеријума за целобројне нуле полинома, наводи се и следеће

*Ако ни један од бројева*

$$(III) \quad F(1), \;\; F(0) = A_n, \;\; F(-1)$$

*није дељив са 3, једначина $F(x) = 0$ нема ни једног целог корена.*

Доказ је леп и једноставан. Наиме, нека је $a$ целобројни корен. Следи да је

$$\begin{aligned} F(1) &= -(a-1)F_1(1) \\ A_n = F(0) &= -aF_1(0) \\ F(-1) &= -(a+1)F_1(-1). \end{aligned}$$

Како један од бројева $a-1$, $a$, $a+1$ мора бити дељив са 3, следи тврђење. Затим се каже

*Обратно правило не важи, т.ј. ако је један од бројева (III) дељив са 3, једначина не мора имати целе корене.*

Следи познати алгоритам налажења рационалног корена целобројног полинома и мноштво лепих примера. Код налажења ирационалних корена приступа се одређивању броја реалних корена и њиховом раздвајању. За два суседна члана неког бројевног низа, који су супротног знака, аутори кажу да *представља једну мену.* Ако су истог знака, онда они *представљају један след.* После краће дискусије о менама низа коефицијената једначине, прелази се на доказ познатог Декартовог правила које гласи

*У једној алгебарској једначини број позитивних корена $R$ не може никад бити већи од броја мена $M$, а ако је мањи, тада је разлика $M - R$ један паран број.*

Као последица претходног тврђења доказује се следеће правило
*Број имагинарних корена једначине не може бити мањи од $n - (M + M')$*, где је $M$ број мена једначине $F(x) = 0$ а $M'$ број мена једначине $F(-x) = 0$.

У доказу се каже
*Ово правило је очевидно пошто број $P$ не може бити већи од $(M + M')$. Кад означимо са $J$ број имагинарних корена имамо дакле*

$$n - J = M + M',$$

*т.ј.*

$$J = n - (M + M').$$

Одмах затим се одреди максималан број корена у датом интервалу. Следи, поново, мноштво лепих примера.

Страна 138 почиње Fourier-овом методом одређивања максималног броја корена једначине, који се налазе у датом интервалу. Данас се ово градиво предаје на студијама математике у оквиру групе предмета који спадају у *Нумеричку математику.*

Следећа метода је Rolle-ova метода коју наводимо из *сентименталних* разлога.

*Између два узастопна корена једначине $F(x) = 0$ налази се најмање један корен изводне једначине $F'(x) = 0$ а, ако их има више, њихов број је непаран.*

*Између два узастопна корена изводне једначине $F'(x) = 0$ може се налазити само један корен $F(x) = 0$ или ни један.*

Следе примери који и данас могу имати своје место у било ком уџбенику нумеричке математике.

Sturm-ова метода је дата на страни 156. Проблем настаје кад не можемо решити изводну једначину. У тексту се каже

*Међутим ако ми изводну једначину не можемо решити, Ролеова се метода не може применити. Ако нам поред тога Декартова и Fourier-ова метода не дају довољно тачне резултате, то треба применити Штурмову методу, која нам потпуно тачно одређује број реалних корена, који се налазе у једном датом интервалу.*

Потом следи доказ ваљаности Штурмовог алгоритма и низ задатака, од којих су неки комплетно решени.

На страни 165 приступа се *Приближном израчунавању ирационалних корена.* Дате су познате нумеричке методе *regula falsi* и Њутнова метода и све то са примерима.

Затим следи кратко поглавље о *Одређивању имагинарних корена једне бројне једначине.*

Полази се од једначине

$$F(x) = 0,$$

чији имагинарни корени имају облик

$$z = x + iy.$$

Проблем се своди на израчунавање реалних бројева $x$ и $y$. Заменом добијамо

$$F(x + iy) = 0,$$

или

$$F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

што је еквивалентно

$$P(x, y) = 0 \ \text{ и } \ Q(x, y) = 0.$$

Раздвајање једначине $F(x+iy) = 0$ добијамо тако што полином $F(x+h)$ развијамо у Тејлоров ред и у њему стављамо $h = iy$. Дакле,

$$\begin{aligned} F(x + iy) &= F(x) + i\frac{y}{1!}F'(x) - \frac{y^2}{2!}F''(x) - i\frac{y^3}{3!}F'''(x) + \cdots = \\ &= \Big(F(x) - \frac{y^2}{2!}F''(x) + \frac{y^4}{4!}F^{(iv)}(x) - \cdots\Big) + iy\Big(F'(x) - \frac{y^2}{3!}F'''(x) + \cdots\Big). \end{aligned}$$

Према томе

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \Big(F(x) - \frac{y^2}{2!}F''(x) + \frac{y^4}{4!}F^{(iv)}(x) - \cdots\Big) \\ Q(x, y) &= y\Big(F'(x) - \frac{y^2}{3!}F'''(x) + \frac{y^4}{5!}F^{(v)}(x) - \cdots\Big), \end{aligned}$$

и решавање полазне једначине сводимо на решавање две једначине са две непознате

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0 \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Наравно, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ су коначне суме, јер се после одређеног броја корака изводи анулирају. У примеру који је дат, лако се елиминише $y$, па се прича своди на једначину са једном непознатом.

четврти одељак, последњи, прави је изазов за решавање. Реч је о *трансцендентним једначинама*. Разумљиво, ради се о једначинама у којима фигуришу *трансцендентне функције*.

У уводу поглавља наводе се суштинске разлике међу реалним полиномима и трансцендентним функцијама. Одмах се констатује да се Декартова и Фуријеова правила не могу применити на трансцендентне једначине. Међутим,

*Rolle-ова се метода може применити на трансцендентну једначину*

*$F(x) = 0$ кад год су функције $F(x) = 0$ и њен извод $F'(x) = 0$ непрекидне функције.*

И овде имамо два илустративна примера. Аутори текста се користе и графицима функција у одређивању корена. Најпре се једначини $F(x) = 0$ нађе еквивалентан израз у облику

$$\varphi(x) = \psi(x),$$

а затим се тражи пресек тих кривих.

**Пример 8.**

$$F(x) = e^x - ax = 0$$

се, јасно, преводи у

$$e^x = ax,$$

и онда се, за реалне вредности $a$, траже пресеци правих $y = ax$ са $y = e^x$.

**Пример 9.**

Мало сложенија је једначина

$$F(x) = x^x - 100 = 0.$$

Она се трансформише на облик

$$x^x = 100,$$

па се каже

*и кад узмемо Briggs-ов логаритам обеју страна једначине добијамо*

$$xlogx = 2,$$

*т.ј.*

$$F_1(x) = xlogx - 2 = 0.$$

*Но ми ту једначину можемо писати у облику*

$$logx = \frac{2}{x}.$$

У пресеку хиперболе и логаритамске криве добија се решење трансцендентне једначине

$$F(x) = 0.$$

Прецизна вредност корена, на шест децимала, одређује се Њутновом методом комбинованом са методом *Пропорционалних прираштаја.*

Овај занимљив текст завршава се применом *Методе узастопних приближавања.* Наиме, једначина $F(x) = 0$ се трансформише у израз

$$x = \varphi(x),$$

па ће корен од $F(x) = 0$ бити фиксна тачка $\varphi(x)$. Прича иде овако

*Предпоставимо да знамо једну приближну вредност корена дате једначине. Нека је та вредност $x = x_0$ а нека је $x = a$ тачна вредност корена т.ј.*

$$\alpha = \varphi(\alpha).$$

Добија се низ

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ...$$

где је

$$x_i = \varphi(x_{i-1}), \;\; i = 1, 2, ...$$

Ако се чланови низа приближавају корену, мора бити

$$|x_{r+1} - a| < |x_r - a|$$

за све вредности $r$. Знамо да је $x = \varphi(x)$ и $\alpha = \varphi(\alpha)$, што нам даје неједнакост

$$|\varphi(x_r) - \varphi(\alpha)| < |x_r - a|$$

или

$$\Big|\frac{\varphi(x_r) - \varphi(\alpha)}{x_r - \alpha}\Big| < 1.$$

*Теорема о средњој вредности* даје

$$\frac{\varphi(x_r) - \varphi(\alpha)}{x_r - \alpha} = \varphi'(\beta_r),$$

где је $\beta_r \in [\alpha, x_r]$. Ово значи да је

$$|\varphi'(x)| < 1,$$

кад $x$ варира у интервалу $[x_0, x'_0]$ у коме се налази $\alpha$. Закључак у тексту је тада низ

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ...$$

има за границу дотични корен.

Следе конкретни задаци у којима се вредност корена израчунава на шест децимала.

## 8. Закључак

Мало је вероватно да су аутори пажљивије гледали овај текст. Сигурно не би било толико штампарских недостатака. Међутим, сигурно је да су то белешке са Петровићевих предавања. Његов дух присутан је на свакој страници текста.

Неоспорно је и то да Петровић није у ова предавања укључио своје оригиналне резултате из *геометрије полинома*, његове омиљене математичке теме.

О Петровићевим оригиналним доприносима алгебри видети у књизи *Алгебра*, књига 4, едиције Сабраних дела Михаила Петровића. Књигу је зналачки приредио професор Жарко Мијајловић. Едицију Сабрана дела Михаила Петровића штампао је *Завод за уубенике и наставна средства*, Београд 1988. године.

Доприносе Теорији полинома Михаила Петровића цитирао је математичар Morris Marden у књизи *Geometry of polynomials*, у издању Америчког математичког друштва, из 1949. године.

Може се рећи да радови Михаила Петровића, о локацији корена алгебарских једначина, данас спадају у област Нумеричке линеарне алгебре, коју популарно називамо *Гершгоринови кругови.*

Теорија алгебарских једначина се данас предаје на свим математичким факултетима света. Круна приче о алгебарским једначинама је Теорија Галоа. Путеви алгебре су недокучиви. Историјски гледано, решавање алгебарских једначина довело је, пре свега, до развоја *Теорије група.* Међутим, доказивање Велике Фермаове теореме природно је водило до појмова *прстена* и *поља.* Развој рачунарства подстиче развој многих алгебарских уопштења група, прстена и поља. У Србији, овим се баве Петровићеви научни потомци.

Математичко потомство Михаила Петровића дало је и даје интересантне доприносе Теорији полинома. Ова тема завређује посебан зборник прегледних радова домаћих аутора.

Ситне грешке у тексту предавања Михаила Петровића и Салтикова потичу, пре свега, од брзоплетог преписивања тадашњих студената.

Шестог маја, ове године, навршило се 150 година од рођења Михаила Петровића, учитеља многих генерација. Преселимо се у мислима, за тренутак, у Петровићева времена. Тадашњи млади професор математике, који је одслушао предавања о алгебарским једначинама, је врло добро знао да решава једначине. *Скупљачи бодова* данашњих студија математике једноставно не стижу да своје апстрактно знање опробају на конкретним примерима.

Величина једног математичара не мери се одсуством грешака, заблуда и промашаја, већ методама и концептима који воде будуће генерације. Сви народи имају своје великане. Ми поштујемо и волимо нашег Михаила Петровића.

*Siniša Crvenković*

THEORY OF ALGEBRAIC EQUATIONS OF MIHAILO PETROVIĆ

Summary

We can say that the lectures about algebraic equations, held by Mihailo Petrović, are mathematical cookies which in a natural way show the unity of algebra and analysis. Lost in space and time, the lectures were waiting for decades to be presented for students of mathematics. Our text recommends Theory of Algebraic Equations by Mihailo Petrović, as a required lecture in mathematical education of young generations.