



СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

SERBIAN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS

SCIENTIFIC MEETINGS

Book CLXXXII

PRESIDENCY

Book 12

MIHAILO PETROVIĆ ALAS

REGARDING ONE HUNDRED AND FIFTY YEARS SCIENCE BIRTH

Scientific meeting with an international partake,
held at the Serbian Academy of Sciences and Arts
on October 2–3, 2018

BELGRADE 2019

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

НАУЧНИ СКУПОВИ

Књига CLXXXII

ПРЕДСЕДНИШТВО

Књига 12

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ АЛАС

ПОВОДОМ СТО ПЕДЕСЕТ ГОДИНА ОД РОЂЕЊА

Научни скуп са међународним учешћем одржан
у Српској академији наука и уметности,
2–3. октобра 2018.

БЕОГРАД 2019



Програмски одбор:

Копредседници: *Жарко Мијајловић, Градимир Миловановић, Стеван Пилиповић*
Чланови: *Војислав Андрић, Зоран Каделбург, Миљан Кнежевић, Александар Липковски, Зоран Огњановић, Зоран Марковић, Миодраг Михаљевић*

Организациони одбор:

Зоран Огњановић, Војислав Андрић, Миљан Кнежевић, Марија Шеган-Радовић, Маја Новаковић, Јелена Катић, Небојша Икодиновић, Александра Делић, Марек Светлик

Уредници

академик Градимир Миловановић
академик Стеван Пилиповић
др Жарко Мијајловић

Издавачи

Српска академија наука и уметности
Београд, Кнеза Михаила 35
Математички факултет Универзитета у Београду
Београд, Студентски трг 16
Математички институт САНУ
Београд, Кнеза Михаила 36
Друштво математичара Србије
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

Дизајн корица

Драгана Лацмановић-Лекић

Технички уредници

Александра Делић
Миљан Кнежевић
Никола Стевановић

Лектура и коректура

Весна Шубић

Штампа

Colorgraph, Београд

Тираж

600 примерака

Подршка Министарства просвете, науке и технолошког развоја

ISBN: 978-86-7025-825-9

ISBN: 978-86-7589-136-9

Садржај

Синиша Црвенковић <i>Теорија алгебарских једначина Михаила Петровића</i>	7
Siniša Crvenković <i>Theory of algebraic equations of Mihailo Petrović</i>	34
Душан Тошић <i>Дело Михаила Петровића „Рачунање са бројним размацима” и интервална математика</i>	35
Dušan Tošić <i>The work of Mihailo Petrovich “Calculation with numerical interval” and interval mathematics</i>	45
Милош Миловановић <i>Значај Петровићевих спектра у заснивању математике</i>	47
Miloš Milovanović <i>La signification des spectres de Petrovitch pour les fondements des mathématiques</i> . . .	61
Miloš Milovanović <i>The Significance of Petrovich’s Spectra for the Foundations of Mathematics</i>	61
Наталија Јанц <i>Life of a Student-Corporal Mihailo Maksić – Student of Mihailo Petrović - Alas and Milutin Milanković</i>	63
Наталија Јанц <i>Животопис ђака-каплара Михаила Максића – студента Михаила Петровића-Аласа и Милутина Миланковића</i>	74
Александар Липковски <i>Савремени поглед на дисертацију Михаила Петровића</i>	75
Aleksandar Lipkovski <i>A contemporary view of Mihailo Petrović’s doctoral thesis</i>	83
Миодраг Михаљевић, Радомир Станковић <i>Михаило Петровић Алас – наш водећи криптограф између два светска рата</i>	85
Miodrag Mihaljević, Radomir Stanković <i>Mihailo Petrović Alas – Our leading cryptographer between the two world wars</i>	95

Радош Бакић, Жарко Мијајловић, Градимир Миловановић <i>Геометрија полинома у радовима Михаила Петровића и његових наследника</i> . . .	97
Radoš Bakić, Žarko Mijajlović, Gradimir Milovanović <i>Mihailo Petrović and geometry of polynomials</i>	116
Мирослав Ђирић <i>Алгебарско наслеђе Михаила Петровића Аласа и Српска алгебарска школа</i> . . .	117
Miroslav Ćirić <i>Algebraic heritage of Mihailo Petrović Alas and Serbian algebraic school</i>	126
Душица Марковић <i>Михаило Петровић - метафоре детињства</i>	127
Dušica Marković <i>Mihailo Petrović – Metaphors of childhood</i>	137
Светлана Јанковић, Миљана Јовановић <i>Стохастичка грана математичког генеолошког стабла Михаила Петровића Аласа</i>	139
Svetlana Janković, Miljana Jovanović <i>The stochastic branch to the mathematical genealogical tree of Mihailo Petrović Alas</i>	148
Миодраг Живковић <i>Михаило Петровић Алас и криптографија</i>	149
Miodrag Živković <i>Mihailo Petrović and cryptography</i>	160
Мирјана Вуковић <i>Од Београдске школе Михајла Петровића Аласа до Сарајевске школе анализе</i>	161
Mirjana Vuković <i>From the Belgrade School of Mihajlo Petrović Alas to the Sarajevo School of Analysis</i>	172

ЗНАЧАЈ ПЕТРОВИЋЕВИХ СПЕКТАРА У ЗАСНИВАЊУ МАТЕМАТИКЕ

МИЛОШ МИЛОВАНОВИЋ*

А п с т р а к т. – Феноменологију Михаила Петровића и његове спектре повезује намера да се иницирају дисциплине које би математици и њеним применама значиле суштински подстицај. Но док је феноменологија од свог настанка привлачила пажњу јавности и била предмет истраживања, за спектре се то не може рећи – премда је Петровић недвојбено изражавао наду да ће се управо на овој теорији засновати ефикасна и универзална метода. Математички спектри при том оцртавају два принципа од значаја током последње деценије његовог живота: линеаризацију података приликом рачунске обраде и поступак „геделизације” који кодира језик помоћу природних бројева [1]. Губи се из вида међутим да Петровићев код није представљен природним, него реалним бројевима који у том погледу сажимају целокупни предмет математичке анализе. Тако схваћена, математика одговара спектралном поступку чинећи јединство са својим применама у физици, хемији и другим областима. Категорички скелет ове методе је појам континуума, чиме се указује сродност са интуиционизмом Браувера код ког је то основна структура свести [2]. По Брауверовом назору, она је установљена интуицијом времена – што наговештава његову важност у заснивању математике. Од значаја је размотрити Петровићеву теорију из тог угла, чиме би се указала веза са математичком феноменологијом која времену такође придаје нарочито место [3].

Кључне речи: реални и p -адски бројеви; континуум; интуиционизам; време; математичка феноменологија

Спектрална метода се састоји у расипању непознатих у нумерички спектар као што анализатор при спектралној анализи расипа снап зракова у светлосни спектар. Непознате се у нумеричком спектру налазе као спектралне пруге и линије на начин на који се одређују непознати елементи у некој супстанци. Главна

* Математички институт САНУ, и-мејл: milosm@mi.sanu.ac.rs

карактеристика пругастиг спектра игра улогу што одговара снопу светлости који испушта анализирана супстанца, док спектрална генератриса одговара призми којом се анализа изводи.

Када су првобитне непознате цели бројеви, анализу њиховог комплекса непосредно врши спектрална генератриса – оне су расуте у спектру као што су то спектрални индекси карактеристични за елементе измешане у усијаном телу. Када непознате нису цели бројеви, потребно их је подвргнути претходној припреми пре него што се унесу у спектралну генератрису као што се подвргава одређеној модификацији светао снап који емитује анализирану супстанцу пре него што се пропусти кроз дисперзивну призму (нпр. стављањем на пут светлости која се анализира стакленог балона са одређеним парама). Овде би се та припрема састојала у некој трансмутацији сагласној са низом непознатих.

Аналогија се наставља још много даље кад се запази да се дисперзија пругастиг спектра мења са карактеристиком спектралног ритма који онај ко рачуна може по вољи модификовати. На сличан начин се дисперзија светлосног спектра мења са условима експеримента који се модификују за исту супстанцу подвргнуту анализи (мењајући температуру, притисак, густину итд.). Равномерна дисперзија нумеричких спектра налази свој аналогон у маси случајева које пружа спектрална анализа у земљи (такав је, на пример, случај извесних делова спектра сумпора произведеног помоћу обложене цеви); исто важи и за равномерно растућу дисперзију (на пример у случају обичног спектра сумпора код ког растојања између максимума равномерно расту у смеру љубичасте боје).

Промене дисперзије нумеричких спектра нису специфичне за извесни низ са којим се спектар доводи у везу. Када се мењају елементи који утичу на карактеристику ритма, модификује се дисперзија спектра било ког низа и то у истом смеру. Исто тако, промена температуре или притиска модификује дисперзију спектра неке светлости у истом смислу за различите зраке подвргнуте анализи.

Постоје при том трансмутације које извесну функцију претварају у вредност која не зависи од полазне и која на производ не оставља никакав траг, а та трансмутација се може састојати и у свођењу сваке функције на нулу. Спектар који би одговарао таквој трансмутацији може бити и континуиран тј. спектар који чине само нуле, мада ће друга трансмутација произвести дисконтинуиран спектар са линијама. Ова чињеница има свој аналогон у спектралној анализи када водоник, угљеников оксид или сумпорисани водоник горе у кисеонику – спектар пламена при анализи помоћу призме нема ниједну линију, мада је у другим околностима спектар истих гасова дисконтинуиран.

Такве аналогије као и велики број других које постоје између математичких и светлосних спектра оправдавају назив који смо дали изложеном поступку [4].

1. Увод

Целокупна филозофија математике у основи се дели на два става – платонизам и питагорејство. Оба стављају нагласак на аритметику, али се при том битно разилазе по питању њеног поимања. За идеалистичку филозофију Платона, бројеви представљају идеје које су савршене, вечне, безвремене и чију бледу сенку чине природне појаве. Свет идеја условљава творца који материју обликује сапет овим појмовима што оцртавају границу његове слободе. Модерна наука заузима ово становиште, уз ретке изузетке који се сматрају зачецима постмодерних схватања [5].

По Питагорином начелу пак, бројеви су ствари што би значило да аритметика представља грану математичке физике. Он с тим у вези нарочито значај придаје музици, а потом и астрономији и геометрији чији је статус подударан са оним што га заступа теорија релативности [6].² И не само да је ово становиште подржано савременом физиком, већ присуствује и у математици чиме се дилема између платонистичког и питагорејског става одражава на питање њеног заснивања. Први од њих би одговарао Хилбертовом формализму, а други интуиционизму Браувера.

За разлику од Хилбертовог програма који математику своди на формални језик, интуиционизам је сматра изградњом све сложенијих структура чиме се време испоставља основом свести. Браувер с тим у вези уводи појам временског континуума који је категорички скелет ове методе, подразумевајући при том динамички идентитет налик Јунговој психологији где природни бројеви носе жиг времена [7]. Они означавају скале континуума који се у том погледу развија и чији израз представљају свеколике структуре математике.

Увидети однос који поједине структуре утапа у континуум ипак је нетривијалан задатак од суштинског значаја за интуиционистичко заснивање. С правом тврдимо да је Петровићева теорија математичких спектра њему посвећена. По среди је без сумње питагорејски став, што се види из навода на почетку овог рада који излаже ауторов начел о јединству математичке методе и њених примена – заснивајући је у аналогији са физиком, или пак физичком хемијом. Штавише, Михаило Петровић на ово и непосредно указује тврдећи како његова теорија даје прави смисао филозофији Питагоре [8].³

² Услед постојања тога становишта може се рећи да геометрија увире у физику; у јединствено гледање на природу, из кога је некад, пре више од две хиљаде година геометрија потекла.

³ Констатујући овакву узајамност између појава и бројних спектра, немогућно је отети се од размишљања о мистичним слутњама старих филозофа који су у свему што постоји или се дешава налазили бројеве и привиђали игру бројева. За Питагорину се име нарочито везује тежња за изражавањем ствари и факата бројевима и једна фамозна његова формула гласи „ствари (бића) су бројеви”. Док је Платон стављао бројеве, као атрибуте поред ствари, које се могу

2. Математички спектри

Појам спектра присуствује у исконском смислу који се јавља још код Њутна, означавајући слику добијену разлагањем светлости [9]. Његова разрада у хармонији и музици употпунила му је значење доводећи га у везу са диференцијалним једначинама и теоријом оператора, што важи и за математичке спектре Михаила Петровића који се могу излагати на тај начин. Он то међутим не чини управо због инсистирања на физикалности математике која је питагорејцима била, али модерним схватањима није баш тако очигледна. С тим у вези, и музичка хармонија се често разматра у појмовима идеализма који је своди на пуку апстракцију чему се с правом противе сами музиколози [10].⁴

Михаило Петровић се музиком бавио безмало професионално предводећи свирачко друштво *Суз*, основано 1896. године, на чије се састанке није могло лако ући и о којима се много причало. Естетски дојам суштински скопчан са етичким начелом чинио је бескомпромисни основ његове личности од ког није одступао ни за јоту [11].⁵ Петровићево схватање естетике било је према томе делатно, али и сазнајно будући да математички спектри у целини представљају теорију музике – уколико се појми као математичка метода.

чулно опажати, питагорејци су тврдили да су бројеви саме ствари. Узајамност између факата и бројних спектра даје прави и тачан смисао таквим неодређеним мистичним рефлексцијама.

⁴ Музиком је време организовано и кондензовано у један скоро опипљив концентрат. Но посматрана са те тачке гледишта, музика је безмало више у домену теоријске физике него естетике. И можда је због тога мало ко пропуштао да уочи шансу коју музика пружа; али се мало ко њоме стварно користио.

⁵ Ја га нисам видео како се гласно смеје. Само сам запамтио његов отмени смех уснама и очима. Тако сам видео да се смеју неки угледни сеоски домаћини на које би Петровић врло лично да је навукао гуњ. Испод његове привидне питомости, пробијала се бескомпромисна чврстина. Испод једноставности, на изглед, искуством у држању откривала се врло сложена природа. Испод научничког мира, крио се страсни немир једног интелектуалца који уме да поштује туђе назоре, али који не одступа од својих уверења. А умео је да буде и жесток. И сасвим сам разумео када је са жестином реаговао на помен једног познатог публицисте који је у Солуну, Првог светског рата, довео у сумњу његов, Петровићев, патриотизам због неких сплетака око бившег престолонаследника Ђорђа. Мишићи су му на лицу заиграли и изговорио је тешку реч, пуну презира и неопозиву, против оних који су у стању за љубав рачунице и каријере да прљају људе. Кажем, ту моралну побуну сам разумео и чинило ми се да Петровић може само тако да реагује. Али ми се, другом приликом, учинило мало необично када се повела реч о једном опет угледном човеку који је зажелело да дође на вечеру „сузоваца” и некако успео да буде позван. Понесен неконтролисаним расположењем, у једном тренутку док су Микини прсти дрхтали по виолинској жици, тај човек је дохватио са стола чашу и треснуо њоме о велико кафанско огледало. Причајући о томе, Петровић није могао, ни после неколико година, да савлада жестину: „И са њим је тада било свршено! Први и последњи пут! Никада више неће моћи да крочи тамо где ми седимо! Ми уживамо. А кад уживамо не ломимо намештај.” Дакле, не само онда када му је озлеђено етичко него и кад му је неко повредио естетско осећање он је кидео заувек с таквим човеком и није могло бити ни говора о помирењу.

Спектрална метода је оцењена као врло оштроуман начин аритметиције разноврсних проблема, чак и по цену великог броја операција практично неизводљивих у доба када рачунари још нису били развијени [12]. По Душану Адамовићу, Петровићеви спектри антиципирају два методолошка принципа примењивана у математици периода који почиње у последњој деценији његовог живота: *први од њих је линеаризација података приликом рачунске обраде, а други поступак „геделизације” којим се сви симболи, формуле, теореме и докази извесне теорије изражавају природним бројевима* [13].⁶ Оно што Адамовић, међутим, по свој прилици намерно превиђа тиче се чињенице да ова метода математику не представља природним већ реалним бројевима. Ни појам линеаризације с тим у вези није посве адекватан будући да његово значење обично подразумева коначан низ података, док су у овом случају по среди пребројиви низови цифара.

Према томе, математика је за Петровића континуум и ни мање ни више од тога. Он ово становиште образлаже нашироко тврдећи како *никаква класа функција која има већу моћ од континуума не може бити предмет математичке анализе, а још мање инструмент њене примене* [8].⁷ Петровић се дакле чврсто држи питагорејског става о јединству математике са примена, чиме се приближава Брауверовом схватању да је основ математике временски континуум који превазилази језик представљајући чин стварања. Браувер под тим превасходно подразумева формализам Хилбертовог програма који је у својој суштини дискретан, те ниуколико није кадар исцрпсти стваралачку моћ континуума [5].

3. Спектрална метода

Уобичајени поступци одређивања аналитичке функције дискретним условима захтевају бесконачно много података као што су коефицијенти редова који одговарају функцији, њене вредности итд. Показује се међутим да је функција потпуно одређена у некој области само једним податком са њом на погодан начин скопчаним, уз допунске услове који су квалитативне природе. Тако је она дефинисана без икакве двосмислености у околини тачке $x = 0$ условом да коефици-

⁶ Овај други поступак примењиван у доказу Геделових теорема од есенцијалне је важности за савремене погледе на заснивање и суштину математике.

⁷ То стога што се у рачунањима ради само са функцијама од којих је свака одређена пребројивим низом елемената. А за такве функције Беровим испитивањима је јасно ограничена реална функционална област која је довољна за све потребе математичке анализе и изван које свака генерализација изгледа да ће заувек остати бесплодна и узалудна. С друге стране, свака функција такве врсте може се сматрати као да одговара једној тачки функционалног простора у коме би једна класа или једна категорија функција представљала једно функционално поље. Штавише, према општој теорији скупова, функционални простор може се свести на елемент реалне праве ограничен тачкама 0 и 1. То значи да се функције могу нумерисати помоћу децималних разломака што се налазе између 0 и 1. По таквим се нумерама разликује једна функција од друге исте класе. Свака од њих је спектар функције на коју се односи.

цијенти њеног развоја у степени ред буду цели бројеви познатог знака и вредношћу коју узима за погодно изабрану независну променљиву. У случају када су сви коефицијенти позитивни цели бројеви мањи од 10 и када је $f(0.1) = \frac{1}{3}$, функција мора бити $f(x) = \frac{3x}{1-x}$ [14].

Уколико је дакле $f(x) = A_0 + A_1x + \dots$ аналитичка функција чији су коефицијенти једноцифрени, она је одређена вредношћу $S = f(10^{-1}) = A_0.A_1\dots$ која се добија ређањем ових цифара. На тај начин добијен број S се назива њеним *спектром јединичног ритма*, а функција $F(x) = f(10^{-1}x)$ таква да важи $S = F(1)$ *генератрисом спектра*. У случају да се коефицијенти развоја састоје од више цифара, потребно је ритам спектра ускладити са одговарајућим бројем места за представљање сваког од њих, која се називају *спектралне пруге*. Ритам може бити *равномеран* – када сваком од коефицијената одговарају пруге исте ширине – или пак *неравномеран* – када то није случај – а који може бити *равномерно* или *неравномерно убрзан*. Употреба кинематичких појмова за опис спектралног ритма наговештава да цифарска места позиционог система означавају време, баш као што је случај у временском континууму Браувера који се развија скалирањем.

Уколико коефицијенти нису целобројни, потребно је применити трансмутацију Δ коју функција f допушта – такву да се развој $\Delta[f] = B_0 + B_1x + \dots$ састоји од целих бројева. Функције које у некој области допуштају извесну трансмутацију чије је дејство обострано једнозначно чине спектралну класу. Она је према томе одређена обликом са њом сагласне трансмутације Δ , као што је класа површи одређена метричким тензором ds^2 [4]. Ова опаска указује на суптилну везу између математичких спектара и теорије релативности која се исказује језиком диференцијалне геометрије. Спектрални поступак састоји се у израчунавању свих коефицијената истовремено помоћу децимала извесног броја [15] – баш као што је у релативистичкој космологији време интегрисано у геометријску структуру теорије.

Спектрална метода се примењује на све проблеме између чијих се непознатих и извесног степеног реда са целим коефицијентима може успоставити кореспонденција. Благодарећи произвољности те кореспонденције, на такве проблеме се наилази у свим гранама рачуна од аритметике, алгебре и теорије вероватноће до разних проблема инфинитезималног рачуна и теорије функција [16]. Ефикасност методе илуструјемо примером из алгебре који се тиче факторизације у прстену полинома са целобројним коефицијентима. Како се ради о коначним низовима коефицијената, у овом случају је примерено користити тзв. *целобројне спектре* који се добијају ређањем цифара лево од децималне тачке.

Нека су дати полиноми $P_1(x) = 46x^2 - 54x + 18$ и $P_2(x) = 26x^2 + 21x - 23$. Њима додељујемо целобројне спектре равномерног ритма 4 који је одређен у складу са коефицијентима полинома. Они гласе $S_1 = P_1(10^4) = 45|9946|0048$

и $S_2 = P_2(10^4) = 26|0020|9977$. Спектар производа $P = P_1 \cdot P_2$ у истом ритму – такав да важи $S = P(10^4)$ – добија се множењем појединачних спектара $S = S_1 \cdot S_2 = 1195|9561|9056|2249|8896$. Овом спектру одговара полином $P(x) = 1196x^4 - 438x^3 - 944x^2 + 2250x - 1104$. Метода је такође применљива на растављање полинома, као и одређивање највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца сводећи ове проблеме алгебре на чисту аритметику. Поступак најпре подразумева изналагање одговарајућег ритма који је кадар представити спектрима како поставку проблема, тако и његово решење [17].

Употреба целобројних спектара, као и записивање негативних коефицијената у спектру, открива везу ове теорије са p -адском аритметиком. При том су p -адски бројеви и установљени у аналогiji са развојем аналитичких функција, који их представља степенима нерастављивог елемента. На исти начин, прстен p -адских целих чине степени редови облика $C_0 + C_1p + \dots$ где је p елемент који сматрамо нерастављивим. Будући да се развијају у смеру налево од децималне тачке, они су неупоредиво погоднији за израчунавања здесна налево [18]. У том погледу, теорија математичких спектара се знатно адекватније исказује у појмовима p -адике, премда на то нико – укључујући и Михаила Петровића – није обратио пажњу. Штавише, математички спектри представљају извршну методологију за увођење p -адских бројева у настави нумеричке математике имајући на уму да их актуелни систем школства не заступа чак ни у високом образовању.

4. Развојни пут спектара

Одјек Петровићевих спектара у научној јавности није био завидан. Иако су расправе и монографије о математичким спектрима објављене на светском језику, интересовање није постојало. Поједини математичари, међу којима су били Окањ, Борел, Поја, Бул, Фер и Фројдентал, писали су приказе у реферативним часописима. Прикази су били углавном коректни и делимично уздржани, а један од њих се сматра негативним – потекао од Ђерђа Поје – услед ауторове тврдње да у књизи није нашао ниједан резултат који би тек спектрална метода учинила доступним [19].⁸ Ово је гледиште напокон усвојио и Михаило Петровић који је, по сведочењу Драгослава Митриновића, био разо-

⁸ Како потенцијални редови имају моћ континуума, могућно је сваком потенцијалном реду придружити један децималан број, и сваки проблем који се односи на потенцијални ред схватити као проблем који се односи на одговарајући децимални број. Писац себи поставља задатак да ову кореспонденцију „ефектуира” и да разне проблеме о потенцијалним редовима преведе у оне са децималним бројевима. Децимални број придружен потенцијалном реду назива се „спектар”. Уколико су коефицијенти M_0, M_1, M_2, \dots потенцијалног реда

$$f(x) = M_0 + M_1x + M_2x^2 + \dots$$

чаран својом теоријом сматрајући да се спектри могу користити само уколико је неки алгоритам или резултат унапред познат. Митриновић томе додаје да су бесплодност теорије показали својим радовима малобројни београдски математичари који су јој се одали и да му није познато да се математичким спектрима ико бавио у иностранству [20].⁹

Овај суд, изречен дефинитивно, није међутим сасвим на месту. Математичким спектрима су се, поред Михаила Петровића, занимали Константин Павлович Орлов, Боривоје Михаиловић, Франтишек Пецка и Макс Арије Вотуло – што говори да су већину чинили странци. Орлов је наиме био Рус, Пецка је Чех, а Вотуло Индонежанин. То што је Београд и поред свега остао у целом свету једини центар ове теорије говори о космополитизму ње и њеног оснивача, а између осталог и његове престонице. Ни изјаву Душана Адамовића како су „широки и плодни” токови математике заобили и иза себе оставили спектре пре но што су они успели да задобију прави облик и стекну пуну делотворност не сматрамо коначном и неопозивом [1].¹⁰ Ипак, остаје његова тврдња да у радовима Петровићевих следбеника преовлађује третирање појединачних проблема и техничке преокупације, најчешће уз коришћење само коначних спектра, при чему је главна пажња посвећена алгоритамској економичности израчунавања. Иако је по том питању добијен већи број занимљивих резултата, целокупна проблематика је умногоме изгубила на значају неслућеним развојем дигиталних рачунара. Унеколико парадоксално звучи чињеница да је развој

цели бројеви, спектар се добија ако се бројеви M_0, M_1, M_2, \dots пишу један за другим. Ако бројеви M_0, M_1, M_2, \dots нису негативни и мањи су од 10, број $f(10^{-1})$ даје један спектар. Број $f(10^{-2})$ могао би се назвати „спектрална пруга” у којој се тамне и светле пруге (тј. цифра 0 и коефицијенти од $f(x)$) међусобно измењују. „Спектрална метода” састоји се у томе да се различити проблеми сведу на проучавање спектра, што је наравно могућно урадити помоћу најразноврснијих трансформација, а у свим случајевима се приближно постиже. Без доказа су наведени резултати разних новијих радова из теорије функција о потенцијалним редовима са целим и рационалним коефицијентима (Хурвиц, Борел, Фату, Поја, итд.). Цитирано је и четврто Хилбертово саопштење о интегралним једначинама, пошто је ту такође употребљен израз „спектар”. Нове резултате које би тек спектрална метода учинила приступачним референт није нашао у овој књизи.

⁹ И том приликом Петровић ми је рекао да је разочаран својим спектрима. То ми је изјавио и раније више пута. Први пут сам од њега чуо да нема смисла да се неко бави његовим спектрима у време када му је К. Орлов саопштио да припрема дисертацију из те области. Добро се сећам да је Петровић рекао да је саветовао Орлову да се не бави спектрима и додао ми је да спектри могу да се користе онда када је неки алгоритам или резултат познат. Уосталом, бесплодност теорије спектра показали су својим радовима малобројни београдски математичари који су се одали овој теорији. Није ми познато да се ма ко бавио спектрима у иностранству.

¹⁰ Оно што овој Петровићевој замисли и настојањима, његовим и његових следбеника, ипак даје одређену, не баш малу, вредност – инспиративну, документарну и историјску – поред већег броја више или мање успешних и инвентивно добијених партикуларних резултата, чини то што они садрже својеврсну (истина, у рудиментарном облику) антиципацију неких важних подручја данашње математичке теорије и њених примена.

рачунарства, који је био неопходан предуслов свеобухватној примени теорије, уједно довео и до њеног сузбијања.

У предговору Петровићевој књизи која је објављена 1919. године, Емил Борел напомиње да су децимални записи најприступачнији облик бесконачности како за схватање тако и за баратање њоме [16]. Сходно томе, ако је могуће свести математичку анализу на проучавање извесних децимала – тиме се у најмању руку добија начин излагања или рачунски поступак, који би били драгоцени. На самом почетку Бореловог излагања, спектрални поступак се оправдава праксом мерења што је веома далековида опаска која сеже до сржи децималног система. Самеравање величина Еуклидовим алгоритмом наине задаје верижни развој чији сваки члан, у складу са Лохсовом теоремом, настоји скоро сигурно одредити децималу по децималу броја [2]. Математички спектри дакле, поред методолошке, без сумње задржавају и фундаментално-теоретску вредност која се тиче њене филозофије и онтолошког заснивања. Ово постаје нарочито врућа тема по слому Хилбертовог програма, што се у основним цртама збило за Петровићевог живота. Немогућност да се математика формално заснује отворила је врата питагорејским схватањима међу којима је интуиционизам свакако на првом месту, а чији потенцијал разраде поседује спектрална метода. Најављујући залазак и коначан пад формализма, Грегори Чејтин сматра да питање како би убудуће требало радити математику изискује барем наредни нараштај математичара [21]. Када ће он и како наступити зависи пре свега од наше смелости да преиспитамо темељна начела властитог постојања.

5. Спектри и феноменологија Михаила Петровића

У оквирима извесне класе, спектар функције варира не само са њом већ и са трансмутацијом која успоставља везу између дате функције и спектра. Ово наликује уобичајеним поступцима шифровања и дешифровања, при чему је функцији додељена улога чистог текста, улогу кључа игра трансмутација примењена у образовању спектра, а улогу криптограма сам спектар. Свака функција коју је могуће приказати аналитички може се тако шифровати неким реалним бројем, што се своди на нумерисање функција у класи. Како пребројиви скуп функција које припадају различитим класама има највише моћ континуума, можемо им образовати заједнички спектар. Тако се свака појава – било каква да јој је природа, врста и сложеност – коју је могуће изразити пребројивим скупом једначина, на исти начин шифрује у складу са спектралном методом [4].

Виспреношћу овог закључка, Михаило Петровић превазилази сопствене увиде отварајући пут разматрању своје теорије из сасвим другог угла – не ради се пак о шифровању, већ управо о дешифровању природних појава. Ако

наиме усвојимо Брауверово становиште да је време основна интуиција свести, онда је очигледно по среди њено разоткривање које свеколике структуре математике сматра изразом временског континуума. Ово би одговарало појму *аналогског језгра* – или *феноменолошког типа факата*, или *феноменолошког пресликавања* – чија примена на математичке структуре још није дала последњу реч. Петровићева феноменологија се прећутно заснива на принципу општег јединства, *јер је само тако појмљиво постојање аналогског језгра у диспаратним појавама* [12].¹¹ Језик теорије категорија ово назива *категоричким скелетом*, па је према томе континуум категорички скелет спектралне методе.

Покушавајући да са становишта самог аутора сажме феноменолошку доктрину, Душан Недељковић истиче како *он елиминира материјалистичке појмове гравитације, афинитета, виталне силе итд. посматрајући само елементе аналогичности који сачињавају законе слојевите стварности* [22].¹² По његовом сведочењу, Петровић се углавном сложио са овим приказом приметивши ипак како га је зачудило кад је видео да је прешао преко механичких основа његове феноменологије. Недељковић му је при том одговорио да то не би била јака страна већ пре ограниченост концепције у којој би се, као у квантној механици, могао наћи и другачији пут тумачења од оног што га пружа класична [23].¹³

Математичка феноменологија Михаила Петровића је већ од првог издања 1921. године стала у ред врхунских дела природне филозофије и епистемологије, која су најчешће управо са механистичких позиција чинила напоре и отвараала путеве да се механицизам превазиђе [24]. У основи његових истраживања остале су конкретне супротности *које су позивале на нова и даља продубљивања, те свестранија и целовитија сагледавања и овладавања природним по-*

¹¹ Он недвосмислено истиче да математичке аналогичности „нису случајности, већ да имају своје подлоге и дубљег разлога у егзистенцији нечег заједничког у самој суштини појава и њихових механизама”. Отуда истоветност математичких релација за квалитативно различите процесе.

¹² Проникнути у оно што је аналогно и заједничко у диспаратним феноменима (физичким, хемијским, биолошким, економским, друштвеним итд.), разликовати у њему аналогске групе, одредити у овим групама типичне схеме и формуле, који су само делови више целине и који, компликујући се извесним социјалним карактеристикама и параметрима, могли би математички објаснити свеколико мноштво ствари – то је задатак који је Петровић поставио према се оснивајући своју математичку феноменологију – ту занимљиву доктрину која замењује посебне природне законе општим схемама које се према њима односе као целина према деловима које поставља.

¹³ Увек и са млађим колегама присан и духовит одговорио ми је да би без Декарта и класичне механике некако осећао да у својој математичкој феноменологији губи чврсто тле под ногама. Рекао сам му да је то свакако тачно, али је тачно и да је сама његова феноменологија један од моћних оригиналних и донекле изграђених путева да се не само то већ и сама феноменологија превазиђе, на шта је он слегао раменима и сумњајући, али и одобравајући допуштао са: „Можда” ... „Има и тога”.

јавама [23].¹⁴ Основним разлогом што она заиста није имала непосредних следбеника Недељковић сматра то што у конкретним анализама показује управо супротно од стриктног механицизма који би у почетном и основном усмерењу хтела доказати.

Развијајући своје увиде, Петровић доспева до метафора и алегорија у постхумно објављеном делу које садржи тестаменталне мисли и погледе аутора [25]. Насупрот каузалном детерминизму његове феноменологије, ова књига се већ првим одељцима посве изричито отвара обичном животу, поезији и науци указујући обиљем конкретних примера на природну употребу аналошког изражавања. На тај начин, математичка феноменологија бива уткана у бурни развој свеопштег стваралаштва, који је суштинско обележје револуције у науци двадесетог века [23].¹⁵

Он заправо на томе ради још од своје књиге о феноменолошком пресликавању из 1933. године, која нарочито избегава математички језик у потрази за аналошким методом кадром да обухвати и расветли револуцију у науци од лорда Келвина до Ајнштајна. Ово дело принципијелно отклања механицизам феноменологије, ограничавајући га само на механичке појаве [26].¹⁶ Оно пред-

¹⁴ ... од математичких и физичких до друштвених и психичких у нераздвојној целини њихове узајамне дијалектичке повезаности и условљености, у којој би постало јасно да у целокупном природном „току развоја” свако кретање у својој суштини и заметку је самокретање које после низа квалитативних скокова у данашњем развиту друштва и човека остварава и скоковит прелаз из света нужности у свет слободе.

¹⁵ Тако, пошавши овог пута од метафора и алегорија из живота и књижевности и набрајајући их на стотине и хиљаде, Петровић укључује своју аналошку природну филозофију у бурни развитац самог стваралачког аналошког пресликавања, предвиђања и моделовања уопште, којим је између осталог окарактерисан револуционарни преокрет делатног дијалектичког развитака методологије природних, техничких, друштвених и филозофских наука, као и мишљења уопште у живој пракси и уметности. И као што се овде сасвим природно окрећу леђа једностраности сваког математизма, јер, иако истиче изванредан значај „механистичког пресликавања” које се „остварава помоћу механичких модела” на пољу физичких наука, Петровић усваја да на разним ступњевима развитака света „владају закони сасвим друкчије врсте” и да је погрешно сводити на механичке оне који то нису, као што су биолошке, физиолошке, друштвене, економске, естетичке итд., пишући: „То се сводило на извештачено механистичко објашњење свега и свачега, натегнуто, неприродно и лишено сваке логичке основице, осим неке овлашне и недовољне сличности. Довољно је подсетити на поменута некадашња јатрохемијарска објашњења физиолошких појава законима механичке равнотеже и кретања.”

¹⁶ Још Декарт је казао да треба тежити томе да се природне појаве представе и објасне „*per figuras et per movement*”. То је и дало повода ономе што Мах назива „механистичком митологијом”, која је покушала да све што се дешава у свету материјалних факата, сведе на појаве равнотеже и кретања материјалних сила. Међутим, модерне физичке концепције као што су нпр. оне у таласној механици Де Броја и Хајзенберга, показују да је то немогућно чак и за мноштво појава материјалне природе. То ће утолико пре бити случај и за пространи свет имподеробилних појава, где се могућност или немогућност тога не може ни доказивати.

ставља покушај филозофске систематизације методолошког преокрета који је наступио, што се сматра *новом митологијом науке* [23].¹⁷ Петровић примећује како механистичка митологија овим прераста у прозаичну митологију факата свдећи се на пуку геометрију [26].¹⁸ Постулиравши линеарно време које је израз картезијанског начела, он невољно примећује како нова митологија примењена на овај модел било какву феноменологију чини беспредметном. Управо стога и остаје до крајности скептичан према теорији релативности, упитан неће ли се време поново успети на истакнуто место које му је одувек припадало [3].¹⁹

Реч је о алегоријама, метафорама и афоризмима које времену придају нарочиту важност, објављеним у Петровићевом чланку из 1931. године. Он их међутим све оставља по страни руководећи се доследним картезијанством, чије преимућство никада није доводио у питање. Управо стога, изван његовог домета остају пре свега широка прострaнства квантне физике недокучива картезијанском начелу. Но баш је њено заснивање у појмовима функционалне анализе довело до операторске формулације комплексних система који се одређују оператором својственог времена скопчаним са неповратним и иновативним збивањима [27]. У том погледу, ова теорија је ослободила време из окова линеарности, раскривајући му исконски значај који наговештавају Петровићеви спектри. Покушај да се Брауверов интуиционизам искаже у појмовима вре-

¹⁷ У последњој глави под насловом „Митологија факата”, Петровић разматра развитак свеколиког људског сазнања као „митског пресликавања” које почиње ступњем древне верске антропоморфне митологије, наставља ступњем развитка механистичког пресликавања рационалне и небеске механике као „механистичке митологије” која је у Лапласово доба, како Петровић критички вели, „била узела маха и била у моди и тамо где јој нимало није било места”, и која се на данашњем ступњу математичким феноменолошким пресликавањем превазилази у „феноменолошку митологију”, или како Петровић вели: „Антропоморфистичка митологија уступа место прво оној коју је Мах назвао механистичком митологијом, која све што се може пресликава на свет појава равнотеже и кретања, а ова затим феноменолошкој митологији која све своди на комбинације апстрактних типова, улога и манифестација њихове сарадње и која ће, несумњиво, у своје време обухватити целокупан свет фактора приступачан људскоме сазнању и људској изражљивости”.

¹⁸ Та су питања створила једну врсту научне митологије факата која се из основе разликује од свих досадашњих митологија, у којој нестаје свих и механистичких и феноменолошких ентитета чијом би се закулисном игром стварали материјални факти, и у којој су ти ентитети смењени чисто геометријским ентитетима у четвородимензионалном простору.

¹⁹ Међутим, није потпуно сигурно да ће се нова слика одржати и да се Хронос неће опет успети на место које су му одредиле људска машта и позитивна наука. Јер може лако испасти да такве слике не произилазе од саме суштине ствари, већ од начина како се посматра и мери време. Изразита и духовита слика енглеског релативисте Едингтона употребљена у другој прилици, то врло лепо илуструје: „Открили смо чудне отиске стопала на обали онога што се не зна. Да бисмо себи објаснили откуда ти отисци, конструисали смо теорије све оштроумније и дубље једне од других. На послетку смо успели реконструисати створа који је оставио те отиске, и нашли смо да је тај створ нико други до ми сами!”

менског оператора уродио је плодом [2] – па према томе математичке спектре с правом сматрамо њеном методом.

6. Закључак

Феноменологију Михаила Петровића и његове спектре повезује намера да се иницирају дисциплине које би математици и њеним применама значиле суштински подстицај. Но док је феноменологија од свог настанка привлачила пажњу јавности и била предмет истраживања, за спектре се то не може рећи – премда је Петровић недвојбено изражавао наду да ће се управо на овој теорији засновати ефикасна и универзална метода [1]. То би по свој прилици и био случај да је имао спремности на тежак подвиг њеног утемељења, који би захтевао значајан искорак у поимању научне заснованости. Исход овог подухвата може се сматрати општом цртом доба у ком је живео и стварао – доба које је било кадро навестити постмодерна стремљења, али не и одредити им закључни облик.

Захвалница. *Рад је подржало Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије кроз пројекте ОИ 174014 и ИИИ 044006.*

Библиографија

- [1] D. Adamović. *Matematički spektri Mihaila Petrovića*. U: D. Adamović and D. Trifunović (eds.), *Sabrana dela Mihaila Petrovića*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998, vol. 5, pp. 239–248.
- [2] M. Milovanović. *Dynamical identity of the Brower continuum*. In: V. Ilić and M. Stanković (eds.), *The Fifth National Conference on Information Theory and Complex Systems – TINKOS 2017*, Belgrade, November 9–10, 2017, Mathematical Institute SASA, Belgrade, 2017, pp. 9–10.
- [3] M. Petrović. *Vreme u alegorijama, metaforama i aforizmima*. *Letopis Matice srpske*, Novi Sad, 1927, 313, 185–192.
- [4] M. Petrovitch. *Leçon sur les spectres mathématiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [5] V. Tasić. *Matematika i koreni postmodernog mišljenja*. Svetovi, Novi Sad, 2002. *Mathematics and the Roots of Postmodern Thought*. Oxford University Press, New York, 2001.
- [6] M. Radojčić. *O stanovištima u geometriji*. U: T. Anđelić (ed.), *Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ*, Bled, 8–12. XI 1949, Naučna knjiga, Beograd, 1950, pp. 37–48.
- [7] M.-L. von Franz. *Number and Time: Reflections Leading toward a Unification of Depth Psychology and Physics*. Northwestern University Press, Evanston, 1974.
- [8] M. Petrović. *Brojni spektri pojava*. *Srpska kraljevska akademija*, Glas, CXVII, Prvi razred, 58, 1927, 45–66.
- [9] J. Mawhin. *Spectra in mathematics and physics: from the dispersion of light to nonlinear eigenvalues*. *Ulmer Seminar*, 2011, 15, 133–146.
- [10] D. Gostuški. *Vreme umetnosti: prilog zasnivanju jedne opšte nauke o oblicima*. Prosveta, Beograd, 1968.

- [11] M. Đoković. *Fragmenti sećanja na Mihaila Petrovića*. U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 39–43.
- [12] E. Stipanić. *Mihailo Petrović, matematičar i fenomenolog*. U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 87–92.
- [13] D. Adamović. *Moderne matematičke discipline, posebno teorija skupova, u radovima Mihaila Petrovića*. Dijalektika, 1968, 2, 95–103.
- [14] M. Petrovitch. *Détermination spectrale de fonction*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Science, 1918, 22, 774–776.
- [15] M. Petrovitch. *Notice sur les travaux scientifiques des M. Michel Petrovitch*. Gauthier-Villars, Paris, 1922.
- [16] M. Petrovitch. *Les spectres numériques*. Gauthier-Villars, Paris, 1919.
- [17] K. Orlov. *Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara*. Filozofski fakultet, Beograd, 1935.
- [18] A. Rich. *Leftist numbers*. The College Mathematics Journal, 2008, 39(5), 330–336.
- [19] G. Pölya. *M. Petrovitch, Les spectres numériques*. Paris 1919. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 1919–1920, 47, 320–321.
- [20] D. S. Mitrinović. *Mihailo Petrović i Stirling-ovi brojevi*. U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 113–116.
- [21] G. Chaitin. *Randomness in arithmetic and the decline and fall of reductionism in pure mathematics*. Chaos, Solitons and Fractals, 1995, 5(2), 143–159.
- [22] D. Nedeljković. *Aperçu de la philosophie contemporaine en Yougoslavie*. Imperie de l'Etat, Paris, 1934.
- [23] D. Nedeljković. *Etape i perspektive prirodne filozofije Mihaila Petrovića*. U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 61–86.
- [24] M. Petrovitch. *Mécanismes communs aux phénomènes disparates*. F. Alcan, Paris, 1921.
- [25] M. Petrović. *Metafore i alegorije*. Srpska književna zadruga, Beograd, 1967.
- [26] M. Petrović. *Fenomenološko preslikavanje*. Srpska kraljevska akademija, Beograd, 1933.
- [27] I. Prigogine. *From Being to Becoming: Time and Complexity in Physical Science*. W. H. Freeman & Co., New York, 1980.

Miloš Milovanović

LA SIGNIFICANCE DES SPECTRES DE PETROVITCH
POUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

R é s u m é

La phénoménologie de Michel Petrovitch et ses spectres sont liés par l'intention d'initier les disciplines qui seraient le stimulant subsentiel pour les mathématiques et leurs emplois. Or, tandis que la phénoménologie attirait l'attention du public et était le sujet des recherches depuis son apparition, ce n'était pas le cas pour les spectres – bien que Petrovitch ait eu sans aucun doute l'espoir que la méthode efficace et universelle sera fondée justement sur cette théorie. Les spectres mathématiques reflètent deux principes importants pendant la dernière décennie de sa vie: la linéarisation des données utilisées dans la procédure du computation et la méthode du “gödelisation” qui code le langage mathématique à l'aide des nombres naturels [1]. Cependant, on ne tient pas compte du fait que le code de Petrovitch n'est pas présenté en tant que les nombres naturels mais les nombres réels qui, dans ce sens là, résumant le sujet entier de l'analyse mathématique. Ainsi conçue, les mathématiques correspondent à la méthode spectrale en créant l'unité avec ses usages en physique, chimie et dans les autres disciplines. La squelette catégorique de cette méthode est le concept du continuum ce qui montre le rapport avec l'intuitionnisme dont c'est la fondation de la conscience. Selon Brouwer, elle est instaurée par l'intuition du temps ce qui indique son importance par les fondements des mathématiques [2]. C'est important d'envisager la théorie de Petrovitch de ce point de vue ce qui permettra détablir le lien avec la phénoménologie mathématique qui accorde aussi un rôle important au temps [3].

Miloš Milovanović

THE SIGNIFICANCE OF PETROVICH'S SPECTRA
FOR THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

S u m m a r y

Phenomenology of Michael Petrovich and his spectra are combined by a common tendency to initiate disciplines that should constitute a substantial stimulus to mathematics and its application. But whilst phenomenology has attracted the public attention since its publication and has been the subject of research, it cannot be said for spectra – although Petrovich was expressing the strong hope an efficient and universal method to be based upon this theory. The mathematical spectra anticipate two principles which were significant during the last decades of his life: linearization of the data in computer pro-

cessing and procedure of “gödelization” that is coding mathematical language by natural numbers [1]. It has been out of sight however that Petrovich’s code is not represented by the natural, but the real numbers summarizing in that respect the entire subject of mathematical analysis. So conceived, mathematics corresponds to the spectral method being unified with applications in physics, chemistry and other domains. The categorical skeleton of the method is the concept of the continuum, which discloses a relationship to intuitionism that considers it to be the fundament of consciousness. According to Brouwer, consciousness is established by an intuition of time which indicates its significance for the foundation of mathematics [2]. It is important to consider Petrovich’s theory from that viewpoint, which should elucidate a relation to the mathematical phenomenology, which also attributes time a special significance [3].