СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

SERBIAN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS

SCIENTIFIC MEETINGS

Book CLXXXII

PRESIDENCY

Book 12

MIHAILO PETROVIĆ ALAS

REGARDING ONE HUNDRED AND FIFTY YEARS SCIENCE BIRTH

Scientific meeting with an international partake,
held at the Serbian Academy of Sciences and Arts
on October 2–3, 2018

BELGRADE 2019

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

НАУЧНИ СКУПОВИ

Књига CLXXXII

ПРЕДСЕДНИШТВО

Књига 12

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ АЛАС

ПОВОДОМ СТО ПЕДЕСЕТ ГОДИНА ОД РОЂЕЊА

Научни скуп са међународним учешћем одржан
у Српској академији наука и уметности,
2–3. октобра 2018.

БЕОГРАД 2019

Уредници
академик Градимир Миловановић
академик Стеван Пилиповић
др Жарко Мијајловић

Издавачи
Српска академија наука и уметности
Београд, Кнеза Михаила 35
Математички факултет Универзитета у Београду
Београд, Студентски трг 16
Математички институт САНУ
Београд, Кнеза Михаила 36
Друштво математичара Србије
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

Дизајн корица
Драгана Лацмановић-Лекић

Технички уредници
Александра Делић
Миљан Кнежевић
Никола Стевановић

Лектура и коректура
Весна Шубић

Штампа
Colorgrafx, Београд

Тираж
600 примерака

Подршка Министарства просвете, науке и технолошког развоја

ISBN: 978-86-7025-825-9
ISBN: 978-86-7589-136-9

Садржај

ДЕЛО МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА „РАЧУНАЊЕ СА БРОЈНИМ РАЗМАЦИМА” И ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА

ДУШАН ТОШИЋ*

А п с т р а к т. – Михаило Петровић објавио је своју књигу „Рачунање са бројним размацима” 1932. године на српском језику. Издање је поновљено 1969. у редакцији др Петра Васића и др Милорада Бертолина. Шездесетих година 20. века започиње развој интервалне математике чији главни протагониста је био R. E. Moore [3]. Интервална математика је брзо постала једна од важних области математике и нашла је велику примену у рачунарству. Настао је велики број радова из ове области. Поставља се питање: „Да ли је рад Михаила Петровића утицао на развој интервалне математике?” Развој интервалне математике је започео са интервалном аритметиком и био је инспирисан електронским рачунарима. Не може се рећи да је рад Михаила Петровића утицао на почетак развоја интервалне математике. Међутим, овај рад је веома значајан због широког спектра математичких дисциплина (почев од аритметике, преко геометрије до диференцијалних и интегралних једначина) у којима су примењени интервали. Радови руских математичара (посебно Чаплигина [7]), настали касније, показали су колико су биле значајне идеје Михаила Петровића у решавању почетног проблема код обичних диференцијалних једначина.

Кључне речи: Михаило Петровић, размак, интервална математика

1. Увод

Михаило Петровић је неколико година држао предавања на Београдском универзитету, а која су се односила на оперисање бројним размацима, тј. интервалима. Након серије курсева, 1932. године публиковао је књигу „Рачунање са бројним размацима”. То је једна од првих књига у историји математке где се

* Математички факултет, Универзитет у Београду, и-мејл: dtosic@matf.bg.ac.rs

систематски обрађују интервали. Под размаком М. Петровић не подразумева само линијски интервал на бројној оси, већ и неку ограничену површину, односно, део простора. Ова књига је оригинално дело и у вези са њом појављује се низ интересантних питања, као што су: које изворе је користио Петровић приликом писања књиге, да ли је књига класичан уџбеник или монографија, да ли је непосредно (или посредно) утицала на настанак интервалне анализе, какав утицај је имала на развој математике у Србији итд. Надаље, у овом раду, настојаћемо да одговоримо на постављена питања.

2. О књизи „Рачунање са бројним размацима”

Књига „Рачунање са бројним размацима” је написана на српском језику. Након првог издања, поново је штампана 1969. године (видети [1] и [2]). Књига не садржи податке о коришћеној литератури, нити постоје неке референце у целокупном тексту. Такође, у другим радовима Михаила Петровића нема података о могућим изворима или утицајима. У раду [3] помињу се радови J. C. Burkill-а из 1924. године и R. C. Young-а из 1931. као први радови из математике у којима се оперише интервалима. Мало је вероватно да је Михаило Петровић знао за ове радове јер је махом био оријентисан на француску литературу. Осим тога, приступи интервалима у овим радовима битно се разликују од приступа који је користио у својој књизи. Књига се састоји из 3 одељка:

а) Бројни размаци у елементарним рачунима;
б) Бројни размаци у инфинитезималном рачуну;
в) Бројни размаци за интеграле диференцијалних једначина.

(У трећем одељку М. Петровић користи термин „Интеграл диференцијалне једначине”, а данас бисмо рекли „Решење диференцијалне једначине”.) Из назива одељака може се закључити да М. Петровић користи интервале у разним областима математике, али највише у инфинитезималном рачуну и диференцијалним једначинама.

За курсеве, које је држао о бројним размацима слободно се може рећи да су били оригинални и јединствени. Михаило Петровић је посећивао разне универзитетске центре у свету и сигурно је био упознат са курикулима из области математике. Без обзира што тамо није било курсева везаних за операсање интервалима, он се није устезао, већ је храбро такве курсеве држао на Београдском универзитету. Како је књига „Рачунање са бројним размацима” настала из оригиналних идеја Михаила Петровића презентованих на предавањима, да ли представља монографију? У предговору другом издању, професор Митриновић третира ову књигу као уџбеник, међутим, приређивачи издања, професори Васић и Бертолино, у предговору, кажу да се књига може третирати и као монографија. На жалост, у књизи није наведена коришћена литература (нити постоје икакве референце) и није написана ни на једном од светских језика. Без сумње, књига представља уџбеник, али, због наведених недостатака, не може се третирати као монографија, и поред тога што обилује оригиналним идејама. Можемо констатовати да је штета што књига није преведена на неки од светских језика јер би, вероватно, имала велику улогу у историји математике.

3. Интервална анализа и „Рачунање са бројним размацима” Михаила Петровића

Шездесетих година 20. века заснована је нова математичка дисциплина – интервална математика. Реч је о математичкој области која се односи на оперисање интервалима. Веома брзо ова област је постала врло актуелна јер се издвојила као значајна теоријска основа рачунарства. Велики број математичара заинтересовао се за интервалну анализу, настао је обиман скуп радова и одржане су бројне конференције које су се односиле на ову област. Оснивачем интервалне анализе сматра се Ramon Moore чија књига Interval analysis ([3]) је подстакла многе научнике да се заинтересују за ову област. Како је књига М. Петровића „Рачунање са бројним размацима” настала 40-ак година раније, поставља се питање да ли је она инспирисала Moore-а да оформи нову математичку дисциплину – интервалну анализу. (Интервална анализа је подстакла примену интервала у разним математичким дисциплинама и тако је оформљена интервална математика.) Ако књига М. Петровића није директно утицала на Moore-ов рад, да ли је можда посредно, тј. да ли је утицала на ауторе чије резултате је потом користио Moore? Најзначајније резултате у раду са интервалима, пре Moore-а, имали су јапански математичар T. Sunaga и пољски математичар M. Warmus (видети [4]). Резултати до којих су дошли су значајни и Moore је био упознат са некима од њих, посебно са резултатима T. Sunaga-е. Резултати до којих су дошла ова два математичара су добијени приближно у исто време и, по свему судећи, независно један од другог. Нема никаквих података да су они били упознати са радом М. Петровића. Ово се може закључити на основу коришћене нотације, односно, на основу начина приступа интервалима сваког од аутора.

3.1. Приступ интервалима у интервалној анализи

Основне операције у интервалној анализи су 4 аритметичке операције над интервалима. Нека су $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ и $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ два интервала од којих је сваки одређен доњом и горњом границом, а које представљају реалне бројеве. Тада можемо дефинисати следеће операције:

$$
\begin{aligned}
&X+Y=[\underline{x}+\underline{y},\overline{x}+\overline{y}],\\
&X-Y=[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}],\\
&X*Y=[\min W,\max W] \quad \text{при чему је} \quad W=[\underline{x}*\underline{y},\underline{x}*\overline{y},\overline{x}*\underline{y},\overline{x}*\overline{y}],\\
&1/Y=[1/\overline{y},1/\underline{y}] \quad \text{при чему} \quad 0\notin Y.
\end{aligned}
$$

Акценат у интервалној анализи је на **поузданости** резултата. Наиме, познато је (видети [5]) да при рачунању са бројевима у покретном зарезу на електронским рачунарима могу да се добију некоректни резултати. R. Moore је био члан неколико тимова који су радили на првим електронским рачунарима и закључио је да помоћу интервала може да се гарантује поузданост резултата. Ако је при том интервал довољно мали, тј. ако је разлика између доње и горње границе интервала мања од захтеване тачности, онда се било који број из интервала може узети као решење. Дакле, поред поузданости, акценат у интервалној анализи је и на **тачности**. Стога је један од главних циљева интервалне анализе развијање метода за сужење (смањење дужине) интервала резултата. За детаљније упознавање интервалне анализе видети [6].

3.2. Приступ интервалима М. Петровића

Уместо директног оперисања са крајевима интервала (као што је урађено у интервалној анализи) М. Петровић уводи појам *рачунски представник размака* преко којег посредно оперише размацима (интервалима). Појам рачунски представник размака М. Петровић дефинише на следећи начин:

„Кад је дат размак (a,b), где је a његов предњи а b његов задњи крај, може се, и то на разне начине, формирати једна функција $f(w)$ једнога параметра w таква:

1. да се за једну дату вредност $w=w_1$, вредност функције поклапа са a, за другу једну дату вредност $w=w_2$ вредност функције поклапа са b;

2. да, док w прелази редом између w_1 и w_2, вредност функције пролази кроз све бројеве који се налазе у размаку (a,b). Такву једну функцију $f(w)$ назваћемо рачунским представником размака (a,b); размак (w_1,w_2) назваћемо *параметарским размаком*. Рачунски представник једнога размака обухвата у облику једног рачунског израза, све бројеве садржане у томе размаку.

Ставивши, краткоће ради:

$$\alpha=\frac{w-w_2}{w_1-w_2} \quad \text{и} \quad \beta=\frac{w-w_1}{w_2-w_1}$$

за рачунски представник размака (a, b) може се узети која било од функција:

$$f(w)=\alpha*a+\beta*b,$$

$$f(w) = (\alpha * a^m + \beta * b^m)^{\frac{1}{m}},$$

$$f(w) = a^\alpha * b^\beta.\text{"}$$

Користећи уведени појам, М. Петровић оперише интервалом само помоћу једног реалног броја – рачунског представника тог интервала. За разлику од интервалне анализе, М. Петровићу није главни циљ сужење размака, тј. није акценат на прецизности.

4. Допринос књиге „Рачунање са бројним размацима"

Уколико књига М. Петровића „Рачунање са бројним размацима" није директно допринела развоју интервалне анализе, поставља се питање: какав значај има и колики је њен допринос развоју математике? Слободно се може констатовати да ова књига представља значајан допринос српској па и светској математици. Сама идеја да се уведу интервали као математички објекти (не само преко бројне праве, већ у равни и простору) и да се оформи курс заснован на размацима је била революционарна за тај период. М. Петровић је „наслутио" да су интервали значајни математички објекти и стога им је поклонио велику пажњу. Уводећи курсеве о интервалима у високошколску математику, крајем двадесетих и почетком тридесетих година 20. века и публиковањем уџбеника, М. Петровић је показао да је био испред времена у којем је живео (у [4] се каже да их је увео у математику пре времена) јер се тек касније (са појавом електронских рачунара) показује од коликог су значаја.

Поред идејног значаја, књига је допринела:

а) да се појави значајан број радова везаних за неједнакости;
б) да се неке идеје М. Петровића примене у интервалној анализи;
в) развоју квалитативне анализе диференцијалних једначина на Београдском универзитету.

Књига „Рачунање са бројним размацима" обилује неједнакостима. То је и разумљиво јер се, приликом рада са размацима, увек испитује да ли је нека вредност између доње и горње границе размака. У књизи су присутне елементарне неједнакости, али и сложене неједнакости везане за диференцијалне једначине. Велики број радова, везаних за неједнакости, објавили су Д. Митриновић (докторирао код М. Петровића) и његови докторанти.

Неке идеје М. Петровића примењиве су и у интервалној анализи. Тако E. R. Hansen ([8]) уводи појам уопштеног интервала оперишући интервалом само помоћу једног реалног броја као што чини М. Петровић помоћу рачунског представника размака. Посебно су интересантни резултати везани за диференцијалне једначине јер се, у комбинацији са резултатима Чаплигина, могу успешно користити у интервалној анализи.

М. Петровић је посебно заслужан за оформљење и неговање курсева квалитативне анализе диференцијалних једначина на Београдском универзитету. Велики број професора (Т. Пејовић, Д. Митриновић, П. Васић, М. Бертолино и др.), доктораната М. Петровића и њихових ученика, бавио се квалитативном анализом диференцијалних једначина. Посебан утицај, на развој квалитативне анализе, имао је трећи одељак књиге „Рачунање са бројним размацима". У овом одељку описан је поступак за ограничавање области у равни (интервал у равни) у којој се налази решење диференцијалне једначине. Ово је важан почетни корак у квалитативној анализи који омогућава одређивање неких својстава решења диференцијалне једначине, без налажења самог решења.

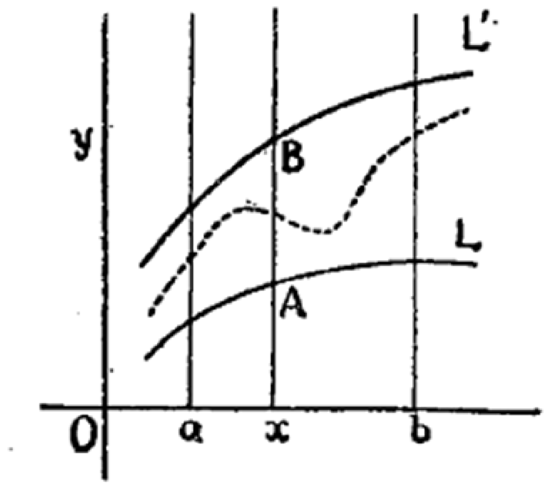
4.1. Размаци М. Петровића у диференцијалним једначинама

Неки резултати из одељка о диференцијалним једначинама могу се успешно и данас употребити па ћемо стога овом одељку посветити мало више пажње. М. Петровић пише: „...било да је тачна интеграција могућа или немогућа, постоје методе за одређивање интеграла у облику размака, тако да се за сваку вредност x садржану у једном размаку (a, b) може одредити одговарајући размак (A, B) у коме се насигурно налази вредност уоченог интеграла дате диференцијалне једначине. Такав је размак, као што се види, променљив, јер се он мења од једне вредности x до друге. Кад се x поступно мења у размаку (a, b), крајеви A и B интегралног размака (A, B) описују по једну линију у равни xOy: то су граничне линије интеграла у томе размаку променљиве x, и то доња и горња гранична линија L и L'." (Слика 1 – оригинална слика из [1]).

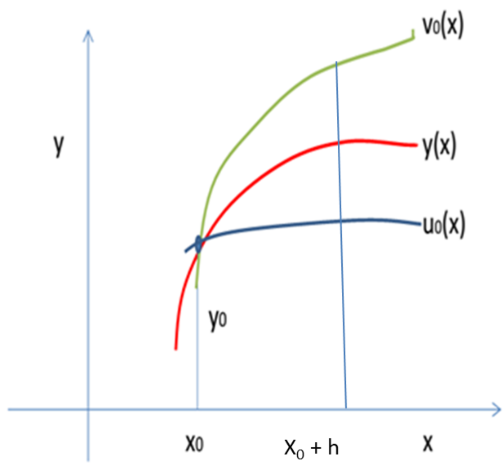
Ако је задат почетни проблем:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

М. Петровић разматра општи поступак за одређивање доње границе $u_0(x)$ и горње границе $v_0(x)$ између којих се налази решење датог почетног проблема, под условом да важи $y(x_0) = u_0(x_0) = v_0(x_0) = y_0$ на интервалу $[x_0, x_0 + h], h > 0$ (слика 2). На конкретним примерима он показује како се овај поступак може применити. Следи један поједностављен пример из [1], али довољно уопштен да демонстрира математичко умеће М. Петровића у одређивању граничних функција $u_0(x)$ и $v_0(x)$.



Слика 1. Површински размак у којем се налази решење диференцијалне једначине



Слика 2. Интервал решења одређен је правама $x = x_0, x = x_0 + h$ и функцијама $u_0(x), v_0(x)$.

Пример 10. *Нека је задат почетни проблем за Рикатијеву диференцијалну једначину:*

$$y' = y^2 + f(x), y(x_0) = y_0.$$

За функцију $f(x)$ *претпостављамо да је без сингуларитета,* $f(x_0) > 0$ *и да важи* $M \leqslant f(x) \leqslant N$ *за* $x \in [x_0, x_0 + h]$*. Користећи предложени, уопштени поступак за налажење ограничавајућих функција траженог решења* $y(x)$*, М. Петровић одређује:*

$$u_0(x) = \frac{y_0\sqrt{N} + Ntg[(x-x_0)\sqrt{N}]}{\sqrt{N} + y_0 tg[(x-x_0)\sqrt{N}]}, \quad v_0(x) = \frac{y_0\sqrt{M} + Mtg[(x-x_0)\sqrt{M}]}{\sqrt{M} + y_0 tg[(x-x_0)\sqrt{M}]}.$$

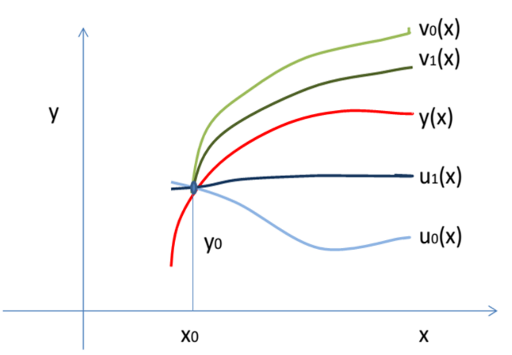
4.2. Чаплигинов метод за двострану апроксимацију решења обичне диференцијалне једначине

Руски математичар Чаплигин ([7]) предложио је аналитички, итеративни поступак за двострану апроксимацију решења почетног проблема обичних диференцијалних једначина. Нека је:

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Када су познате почетне ограничавајуће функције $u_0(x)$ и $v_0(x)$ за које важи $y(x_0) = u_0(x_0) = v_0(x_0) = y_0$, онда се методом Чаплигина (слика 3) може одредити низ апроксимација $u_n(x)$ и $v_n(x), (n = 1, 2, 3, ...)$ за које важи:

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \leqslant ... \leqslant u_k(x) \leqslant y(x) \leqslant v_k(x) \leqslant ... \leqslant v_1 \leqslant v_0(x).$$



Слика 3. Графички приказ једне итерације Чаплигиновог метода

Битна карактеристика Чаплигиновог метода је брзина конвергенције. Наиме, за $n-$ту итерацију функција $u_n(x)$ и $v_n(x), (n = 1, 2, 3, ...)$ важи:

$$|v_n(x) - u_n(x)| < \frac{C}{2^{2^{n-1}}},$$

где је C позитивна константа. Чаплигинов метод омогућава да се брзо сужавају површински интервали у којима се налази решење датог почетног проблема. На тај начин се постиже прецизност битна за интервалну анализу. Важан корак у Чаплигиновом методу је одређивање почетних апроксимација $u_0(x)$ и $v_0(x)$. Већ смо констатовали да је овај корак важан и за квалитативну анализу диференцијалних једначина. Чаплигинов метод је настао 20-так година након публиковања књиге „Рачунање са бројним размацима” и није могао бити познат М. Петровићу. Да је овај метод био познат М. Петровићу, вероватно би књига о размацима била много богатија. Чаплигинов метод је аналитички и после наколико корака изрази за рачунање апроксимација постају врло комплексни. Један од начина да се имплементира је дискретизација. Постоји низ тешкоћа приликом дискретизације Чаплигиновог метода (видети [9]). У принципу, могуће је извршити дискретизацију на више начина, али се тиме овде нећемо бавити.

5. Закључак

Књига „Рачунање са бројним размацима” је једна од првих у историји математике у којој се систематски оперише интервалима. И поред тога, не може се рећи да је утицала на настанак интервалне математике. Међутим, књига је имала велики утицај на развој математике у Србији. Утицала је на настанак великог броја радова о неједнакостима, али посебно је значајна за оформљење курсева из квалитативне анализе диференцијалних једначина на Београдском универзитету. Поједини резултати из књиге могу се и данас употребити у интервалној анализи. За то је потребно детаљније упознавање тих резултата, што може бити предмет неког будућег истраживања.

Библиографија

[1] М. Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Издање задужбине Луке Ћелевића – Требињца, Београд (1932).

[2] М. Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Издавачко предузеће Грађевинска књига, Београд (1969).

[3] R. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N. J. (1966).

[4] S. Markov and K. Okumura, *The Contribution of T. Sunaga to Interval Analysis and Reliable Computing,* In: T. Csendes (ed.) Developments in Reliable Computing, Kluwer (1999), pp. 163–184.

[5] R. Hugo and N. Santiago, *Interval Computation*, www.informatik. uni-bremen.de/.../ Santiago102007Interval.pdf
[6] R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud, *Introduction to interval analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2009).
[7] S. A. Chaplygin, *Collected Papers on Mechanics and Mathematics*, Moscow, (in Russian), (1954).
[8] E. R. Hansen, *A generalized interval arithmetic*, In: Nickel K. (eds) Interval Mathematics. IMath 1975. Lecture Notes in Computer Science, vol 29. Springer, Berlin, Heidelberg (1975).
[9] D. Tošić, *Some problems related to discretization of Chaplygin's method*, Mat. vesnik, 35(1983), pp. 305–318.

Dušan Tošić

THE WORK OF MIHAILO PETROVICH “CALCULATION WITH NUMERICAL INTERVAL” AND INTERVAL MATHEMATICS

Summary

Mihailo Petrovich first published “Calculation with numerical intervals” in 1932 in the Serbian language. The realese was reprinted in 1969 in the editorial Dr. Petar Vasic and Dr. Milorad Beretolino. The development of interval mathematics began in the 1960s with R. E. Moore [3] as its main protagonist. The interval mathematics quickly became a significant field in mathematics with prominent use in computer sciences and numerus papers were published in this field. The key question is: “Did M. Petrovich influence the development of interval mathematics?” The development of interval mathematics commenced with interval arithmetic and it was inspired by electronic computers. One could not make a strong claim that the work of M. Perovich directly influenced development of interval mathematics. However, his groundbreaking work was very important for a wide spectrum of mathematical disciplines in which the intervals are applied (arithmetic, geometry, differential and integral equations, to name a few). Subsequent publications by Russian mathematicians (especially Chaplygin [7]), pointed out the significance of M. Petrovich’s ideas in solving the initial value problem at ordinary differential equations.